n.v.

OS 100 n.v. 64

Zur K.
Landwirthschaft und
Gewerbschule Nürnberg.
1843/44.

A 302

Anleitung
zur
Trigonometrie
in sokratisch=hevristischer Form

für

solche, die sich selbst darin unterrichten wollen,

nebst

Anwendung
erklärter und bewiesener Sätze auf alle Fälle im gemeinen Leben, zur Uebung in trigonometrischen Berechnungen;

wie auch

von den Logarithmen
mit abgekürzten Tabellen

von

A. O. Meyer,

vormals Lehrer der Mathematik an einem Institut in Lübeck, jetzt Rechenmeister in Heide.

Altona,

bei J. F. Hammerich, 1815.

131561359

Bibliothek
Passau

Vorerinnerung.

So wie in der Anleitung zur Geometrie in sokratisch-hevristischer Form, 2 Theile, Altona, bei Hammerich, 1803—1806., bemühte ich mich auch hier, dem Lehrling bald mehr, bald weniger behülflich zu seyn, daß er aus den bereits bekannten und bewiesenen Sätzen, das Unbekannte selbst finde und herleite. Es war mir nicht so sehr Zweck, die trigonometrischen Sätze dem Gedächtnisse des Lehrlings einzuprägen, sondern vielmehr bei Erlernung derselben das eigene und richtige Denken zu veranlassen und zu üben, und die Urtheilskraft zu schärfen und zu erhöhen.

Um den gehörigen Zusammenhang in der Trigonometrie nicht zu unterbrechen, ließ ich die Anwendung nicht gleich bei den Lehrsätzen, sondern erst nachher, für sich, folgen; auch konnte in der

Trigonometrie nicht gut das Nöthige von den Logarithmen gesagt werden. Des vielfachen und ausgebreiteten Nutzens wegen, welche aber die Logarithmen haben, schien es mir nicht allein zweckmäßig; sondern zum vollständigen Verstehen trigonometrischer Berechnungen durchaus erforderlich, hierüber etwas ausführlicher, als gewöhnlich in der Trigonometrie geschieht, zu seyn.

Geschrieben am 8. December 1814.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

§. 1. Von der Bestimmung der Größen. Seite 1
§. 2. Erklärung und Eintheilung des Begriffs Trigonometrie. = = — 2
§. 3. Sinus. = = = — 3
§. 4. Folge aus diesem Vorhergehenden. — 5
§. 5. Verhältniß eines rechten Winkels zu dem Halbmesser des Kreises. Sinus totus. = = — 7
§. 6. Tangente, Secante und Sinus versus. — 8
§. 7. Unbestimmte Größe der Tang. und Sec. eines Bogens von 90°. — 10
§. 8. Complementswinkel oder Ergänzungswinkel. = = — 11
§. 9. Cosinus, Cotangente und Cosecante. — 12
§. 10. Kurze Wiederholung. = = — 15
§. 11. Folge aus dem Vorigen. = — 16
§. 12. Einige Bemerkungen darüber. = — 18

Eigenschaften der trigonometrischen Linien.

§. 13. Lehrsatz. Verhältniß aller trigonometrischen Linien gegen ihre Radien. = = Seite 20
§. 14. Verhältniß trigonometrischer Linien gegen einander. = = — 24
§. 15 — 17. Berechnung der Sin. von verschiedenen Graden. = = — 31 — 41
§. 18. Berechnung der Tangenten und Secanten. = = — 41
§. 19. Von den Tabellen. = = — 44 — 52
§. 20. Das Verhältniß zweier Seiten in einem rechtwinklichten Dreiecke. — 52
§. 21. Das Verhältniß des Sin. tot. in einem rechtwinklichten Dreiecke zu der Cotangente eines spitzigen Winkels. = = — 55
§. 22 — 25. Das Verhältniß der Seiten in einem jeden geradlinigten Dreiecke. = = — 57 — 68

Berechnung unbekannter Stücke in einem rechtwinklichten Dreiecke.

§. 26. Aus der Hypothenuse und der einen Cathete. = = — 69
§. 27. Aus der Hypothenuse und der andern Cathete. = = — 74
§. 28. Aus beiden Catheten. = = — 78
§. 29. Aus einer Seite und einem Winkel. — 82

Berechnung unbekannter Stücke in einem schiefwinklichten Dreiecke.

§. 30—31. Verhältniß der Seiten eines jeden schiefwinklichten Dreieckes. = = Seite 92 — 99
§. 32. Aus zwei gegebenen Winkeln und einer Seite das Uebrige zu finden. — 99
§. 33—36. Aus zwei gegebenen Seiten und einem Winkel zu schließen. — 102—116
§. 37—38. Aus 3 gegebenen Seiten zu schließen. = = — 116—127

Anwendung erklärter und bewiesener Sätze.

Aufgabe 1. Die Höhe eines Thurmes zu bestimmen. = = — 128
— 2. Ein gegebenes Stück Land zu halbiren. = = — 132
— 3—5. Die Entfernung zweier Oerter zu bestimmen. = — 135—144
— 6. Die Entfernung des Standpunktes nach mehreren Oertern zu berechnen. = = — 144
— 7. Aus zwei bestimmten Seiten und einem Winkel zu schließen. — 154

Von den Logarithmen.

§. 1. Erklärung geometrischer und arithmetischer Progressionen, Logarithmen, logarithmisches System, Grundzahl. = = S. 157
§. 2 — 3. Eigenschaften dieser Progressionen. = = — 159 — 162
§. 4 — 7. Eigenschaften der Logarithmen. — 162 — 165
§. 8 — 12. Berechnung der Logarithmen. — 165 — 170
§. 13 — 14. Aus Logarithmen, die dazu gehörigen Zahlen zu finden. = — 172
Tabelle der Logarithmen für die Sinus und Tangenten, auf sechs Decimalstellen. = = = — 175 — 219
Tabelle der Logarithmen für die gemeinen Zahlen von 1 bis 999, auf sechs Decimalstellen. = = — 221 — 239

Die ebene Trigonometrie.

§. 1.

Nach §. 178. im 2ten Theile der Anleitung zur Geometrie in sokratisch-heuristischer Form können die im Felde gemessenen Linien durch den verjüngten Maaßstab ins Kleine aufs Papier gebracht werden.

Wiederhole mir noch einmal: wenn z. B. eine Linie von 12 Ruthen 3 Fuß und 4 Zoll ins Kleine aufs Papier gebracht werden sollte; wie wäre dies noch zu machen?

Wie aber, wenn eine Linie von 120000 Ruthen oder mehreren Meilen aufs Papier gebracht werden sollte; wie müßte man dies bewerkstelligen?

Man müßte eine Linie von ohngefehr 1 Zoll Länge in dem verjüngten Maaßstabe z. B. zehntausend Ruthen bedeuten lassen.

Verzeichne dir nun einmal einen solchen Maaßstab — (Es wird leicht eine kleine Unrichtigkeit entdeckt; etwa die Länge von dem 200sten Theile eines Zolles.)

Um wie viel ist nun in der ganzen Länge von 120000 Ruthen gefehlt?

Was waren die Ursachen dieses Fehlers?

Theils die Instrumente, die ich dabei brauchte; theils konnte ich es nicht hinlänglich mit den Augen unterscheiden.

Um so viel mehr, wenn man nun eine Länge von mehreren tausend Meilen nach dem verjüngten Maaßstab auf dem Papier zu verzeichnen hätte.

Was lernen wir nun aus diesen Beispielen?

Daß man sich auf diese Weise in sehr vielen Fällen gar keine große Genauigkeit versprechen könne.

Wir können auch das wirkliche Abmessen entbehren, und überhaupt alle Größen durch Rechnen viel genauer finden, weil man durch den Verstand die kleinsten Theile, die sich mit den Augen nicht mehr bemerken lassen, sehr leicht unterscheiden kann.

Dies lehrt nun die ebene Trigonometrie; und du siehst jetzt hoffentlich den Nutzen und die Nothwendigkeit ein.

§. 2.

Wie fanden wir im 1sten Theile der genannten Geometrie §. 61. den Satz: daß alle Winkel in einem jeden Dreiecke zusammen 180° ausmachen?

Wir verzeichneten ein Dreieck, zogen durch eine Spitze desselben eine gerade Linie parallel mit der gegenüberliegenden Grundlinie, und maßen nun die Winkel durch Vergleichung.

So auch ein anderes Beispiel s. §. 79.; wie fanden wir, daß eine senkrechte Linie, welche eine Sehne halbirt, auch den dazu gehörigen Bogen in zwei gleiche Theile zerlegt?

Wir verzeichneten eine senkrechte Linie, welche eine Sehne halbirte, construirten noch zwei Sehnen und ꝛc. ꝛc.

Also durch Verzeichnung und durch unmittelbare Messung fanden wir das Unbekannte.

Aus dem eben vorhergehenden Satze haben wir aber gesehen, daß auf diese Weise oft keine große Genauigkeit statt finden kann; daher müssen wir durch Rechnung aus einigen bekannten Theilen eines Dreieckes die übrigen finden, und diese Wissenschaft nennen wir Trigonometrie.

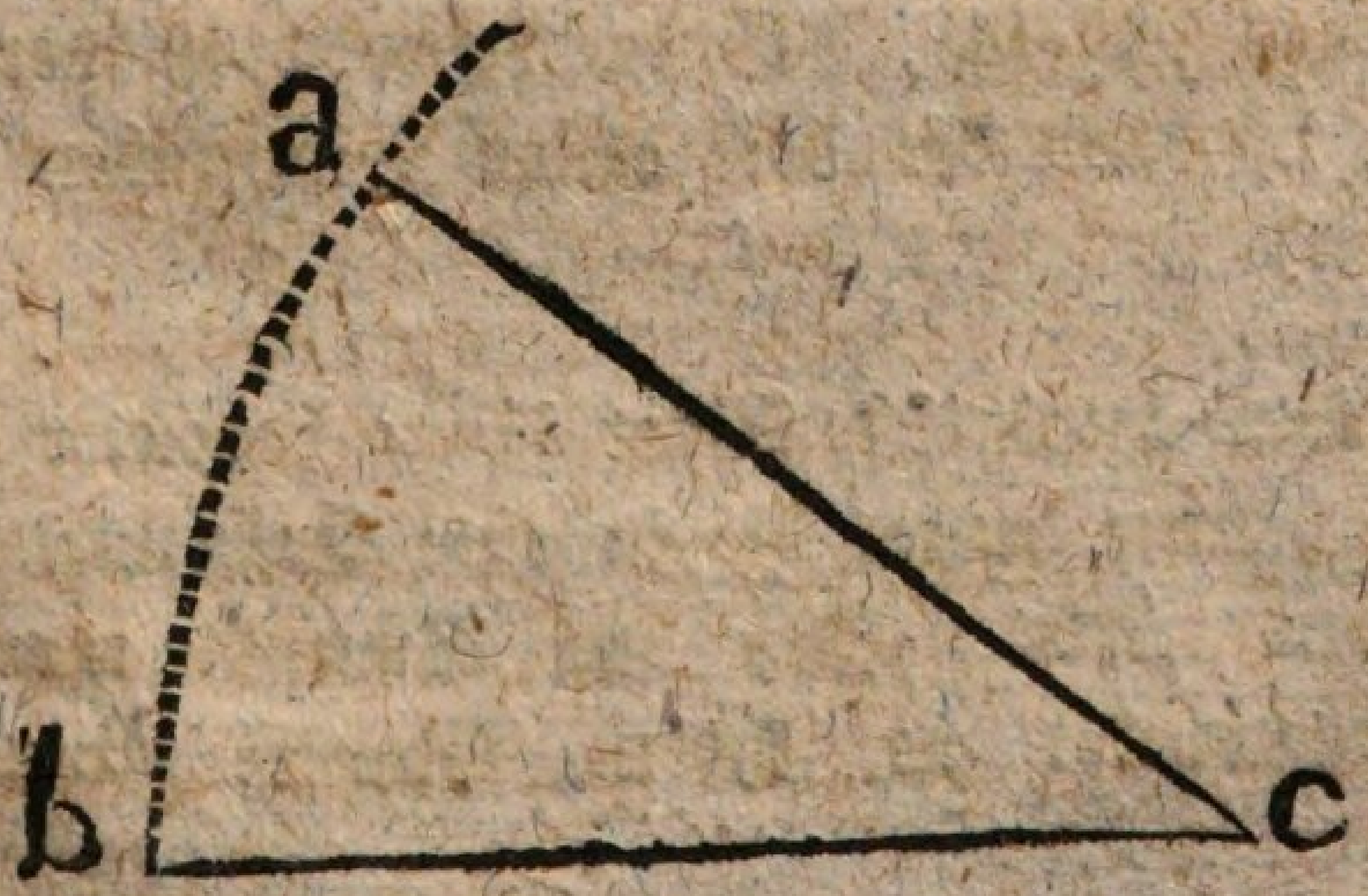
Sie wird gewöhnlich eingetheilt in die ebene und sphärische.

Die ebene Trigonometrie beschäftigt sich mit der Ausrechnung der geradlinigten Dreiecke;

die sphärische Trigonometrie mit der Auflösung der Dreiecke, deren Seiten Bögen auf der Oberfläche einer Kugel (Sphäre) sind.

§. 3.

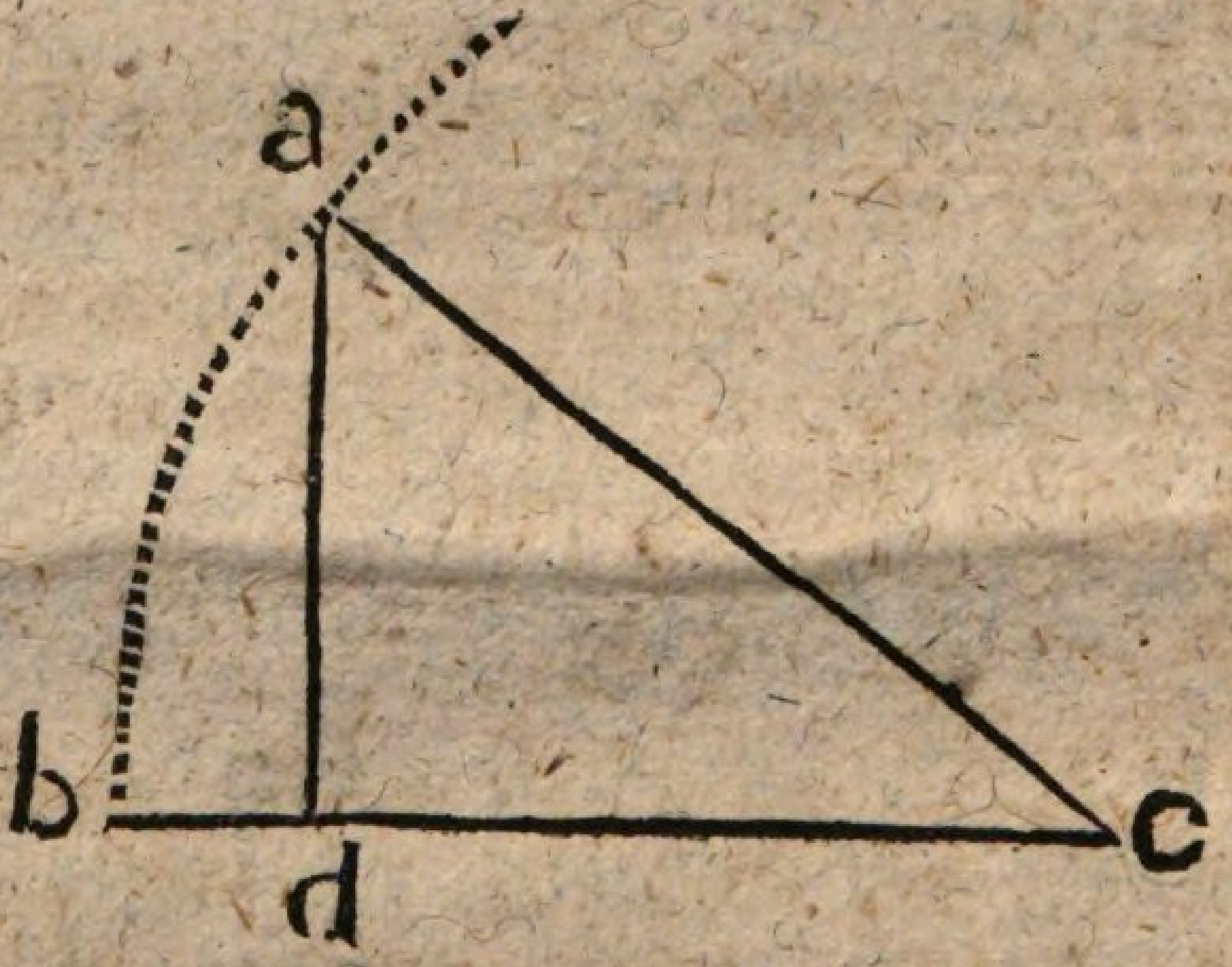
Man hat in der Trigonometrie gewisse gerade Hülfslinien ausfindig gemacht, welche sich statt der Winkel und Bögen gebrauchen lassen. Diese wollen wir nun erst näher kennen lernen.



Hier machte ich erst den ∠acb, beschrieb aus dem Punkte c mit ca ein Bogenstück, wie viele Grade hat nun der Winkel zu seinem Maaße?

So viele Grade, als das Bogenstück von a nach b enthält.

Wenn ich nun von dem Endpunkte des einen Schenkels — hier von a — eine senkrechte Linie auf den andern Schenkel fallen lasse, so heißt diese Linie der Sinus des Winkels acb und auch der Sinus des Bogens ab.

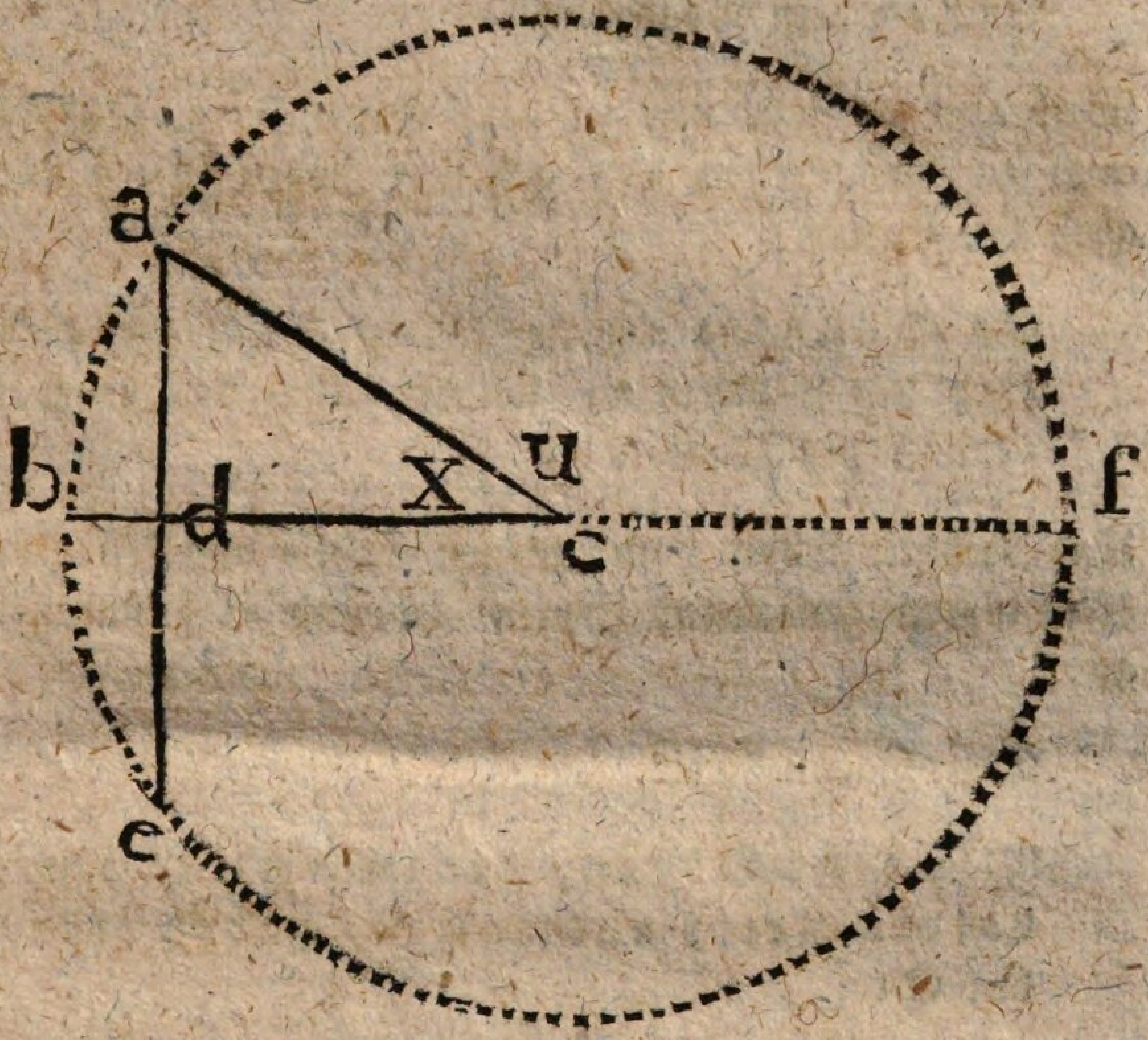


ad ist hier also der Sinus. Das Zeichen, womit man dies anzeigt, ist entweder bloß der erste Buchstabe (S.) oder die drei ersten Buchstaben dieses Worts (Sin.)

Anmerk. Das lateinische Wort Sinus bedeutet wahrscheinlich eine Linie, die in eine Oeffnung hinein geschoben wird. Bei den Römern ward der Faltungswinkel in ihrem Mantel Sinus genannt.

§. 4.

Verlängern wir nun in gerader Richtung den Sinus eines Bogens über den Punkt hinaus, mit welchem er auf dem Radio steht, z. B.



Hier ist a d verlängert nach e, bis an die Peripherie; wie nennen wir denn diese so entstandene Linie in Absicht auf den Kreis?

Und welche Richtung hat der Halbmesser b c darauf?

Der Halbmesser steht senkrecht.

Was folgt nun, nach dem Vorhergehenden, der wie vielste Theil ist a d von a d e?

So auch, welchen Theil macht a b von dem Bogen a b e?

Zu welchem Bogen gehört ade?

Zu dem Bogen abe.

Bloß zu diesem Bogen?

Auch zu dem Bogen afe.

Weil also ae nicht nur zu dem Bogen abe, sondern auch zu dem Bogen afe gehöret; wozu ist ad nun auch der Sinus?

So ist ad nicht nur der Sinus des Bogens ab oder des Winkels x, sondern auch des Bogens af und des Winkels u.

Und welchen Theil vom ganzen Kreise machen nun diese beiden genannten Bögen ba und af zusammen aus?

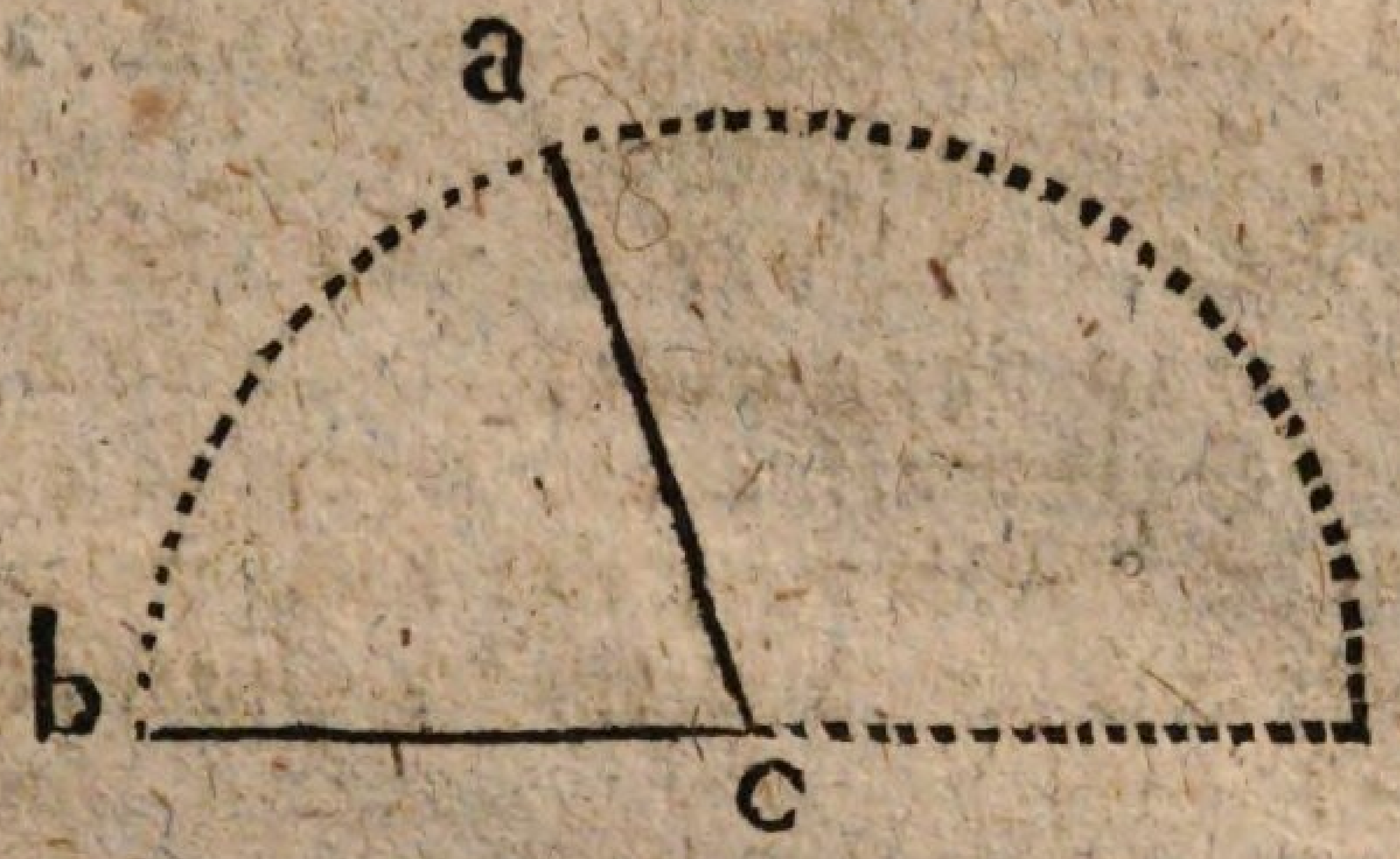
Den halben Kreis.

Also zwei Bögen, die zusammen einen halben Kreis ausmachen, haben einerlei Sin.

So auch, was sind x und u — s. Fig. — für Winkel, weil sie neben einander liegen, einen Schenkel gemeinschaftlich haben, und die andern beiden Schenkel eine Linie bilden, nach §. 16. Geom. 1. Theil? Und wie viele Grade enthalten sie zusammen?

Also überhaupt solche 2 Winkel, die zusammen genommen 180° ausmachen, haben einerlei Sin.

§. 5.

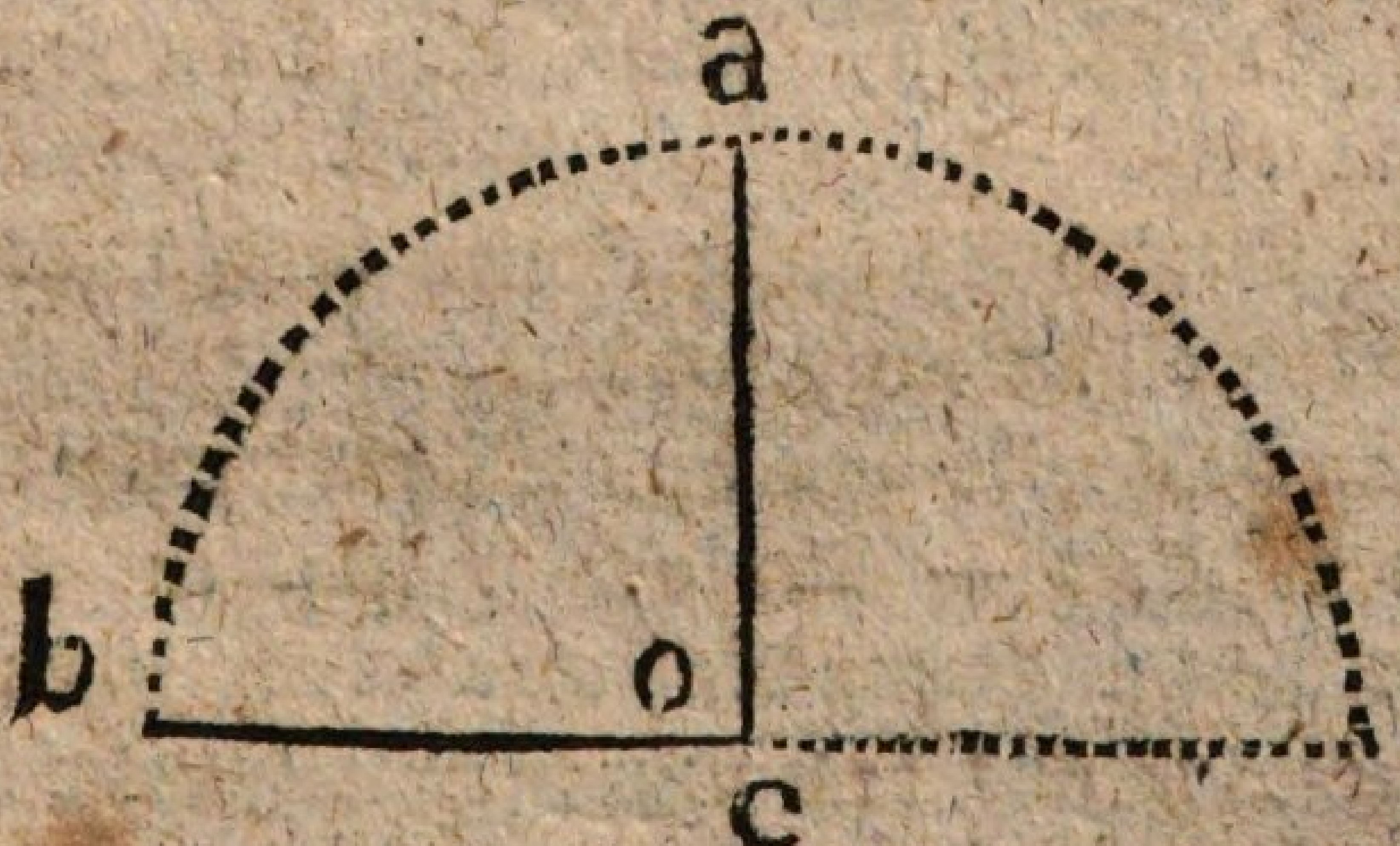


Hier habe ich einen Winkel acb gemacht, ziehe du nun den Sin.

Zu welcher Klasse von Winkeln gehört acb, wenn wir darauf sehen, wie der Schenkel ac auf bc steht?

Es ist ein spitzer Winkel, doch beinahe so groß, als ein rechter.

Wenn nun aber wirklich ac senkrecht auf bc stände, oder, welches einerlei ist: wenn acb ein rechter Winkel wäre, und du solltest nun den Sinus ziehen, z. B.



So ist die senkrechte Linie ac der Sinus des Bogens ba, und des Winkels o.

Da nun ac der Halbmesser ist; was folgt nun in Absicht der Größe, wenn wir den Sinus eines rechten Winkels oder eines Bogens von 90° mit dem Halbmesser des Kreises vergleichen?

So folgt, daß der Sinus eines rechten Winkels oder eines Bogens von 90°, dem Halbmesser des Kreises gleich ist.

Und weil der Radius die größte halbe Sehne ist; was folgt daher auch für die Größe des Sin. eines Bogens von 90°?

So muß der Sinus eines Bogens von 90°, der größte unter allen möglichen Sinussen seyn.

Es können daher alle andere Sinusse als Theile von diesem angesehen werden. Deswegen hat man ihn, als die Einheit angenommen, und ihn Sinus totus (der größte Sinus) oder kurz Radius genannt.

Man bezeichnet diesen Sinus entweder so: Sin. tot. oder durch den Buchstaben R.

§. 6.

Die zweite und dritte Linie, die wir durchaus kennen müssen, ehe wir zu den trigonometrischen Berechnungen fortschreiten, sind die Tangente und Secante.

Die Entstehung dieser Linien kann man sich auf folgende Art allgemein gedenken.

Man beschreibe aus dem Scheitelpunkte eines gegebenen Winkels — hier c, s. Fig. ein Bogenstück zwischen seinen Schenkeln oder auch einen ganzen Kreis, errichte aus dem Durchschnittspunkte des einen Schenkels mit der Peripherie, z. B. aus b eine senkrechte Linie von unbestimmter Länge bx, und verlängere den andern Schenkel, bis er diese senkrechte Linie

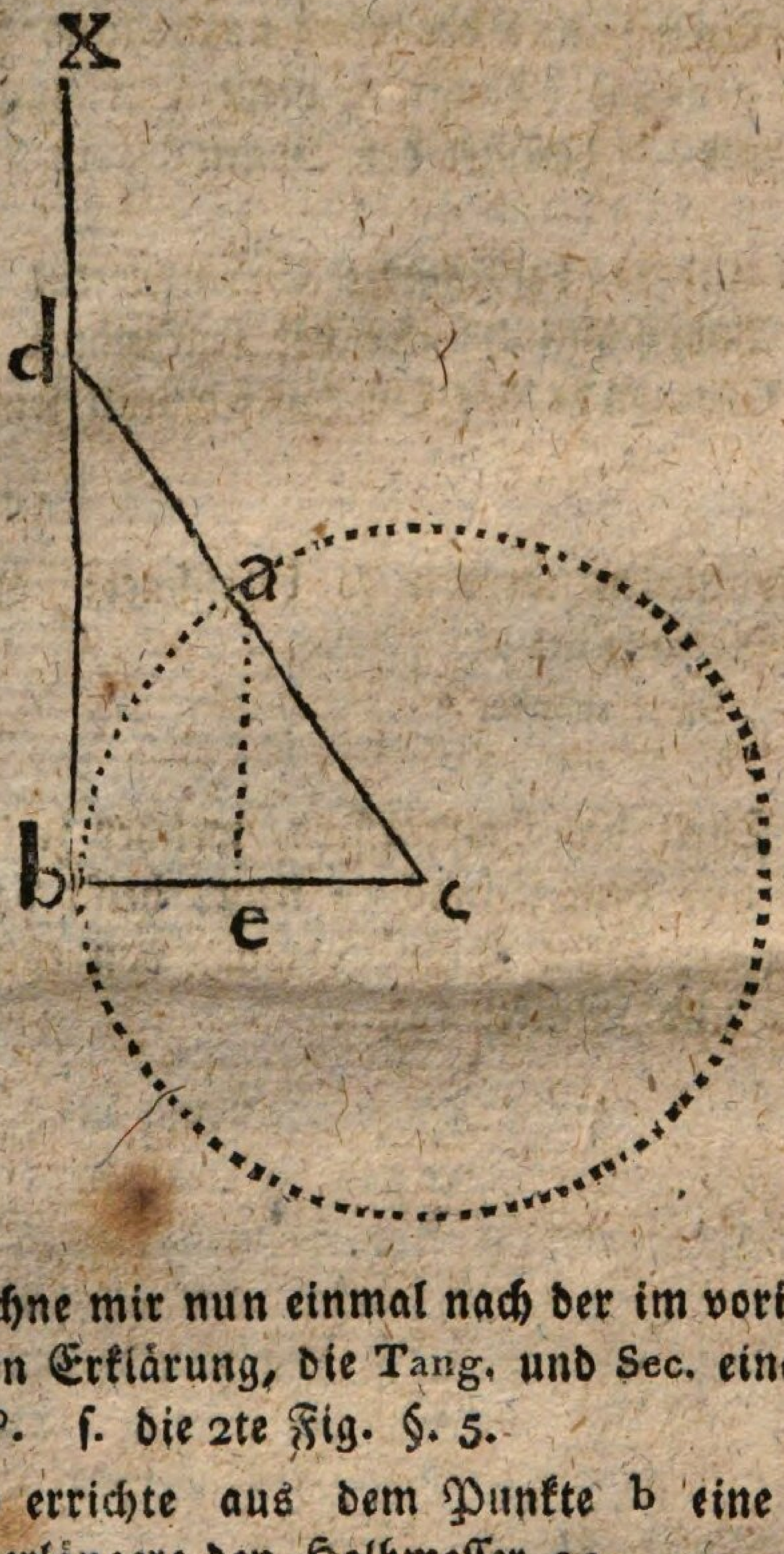
schneidet: so wird das bestimmte Stück der senkrechten Linie bd, welches der verlängerte Schenkel abschneidet, die **Tangente** des Bogens ba und des Winkels acb genannt (Tangente heißt Berührer, denn die Tangente ab berührt den Bogen ba in b).

Der andere verlängerte Schenkel des Winkels bis zum Durchschnittspunkte der senkrechten Linie cd heißt die **Secante** des Bogens ab und seines Winkels acb.

Diese Linien werden so bezeichnet: oder auch
Tang. heißt Tangente;
Sec. — die Secante.

Der Theil des Halbmessers, welcher zwischen der Tang. bd und dem Sinus ae liegt, heißt der Quersinus oder der Pfeil (Sinus versus) von eben diesem Bogen ba und Winkel acb.

§. 7.



Zeichne mir nun einmal nach der im vorigen §phen gegebenen Erklärung, die Tang. und Sec. eines Bogens von 90°. s. die 2te Fig. §. 5.

Ich errichte aus dem Punkte b eine senkrechte Linie, verlängere den Halbmesser ca.

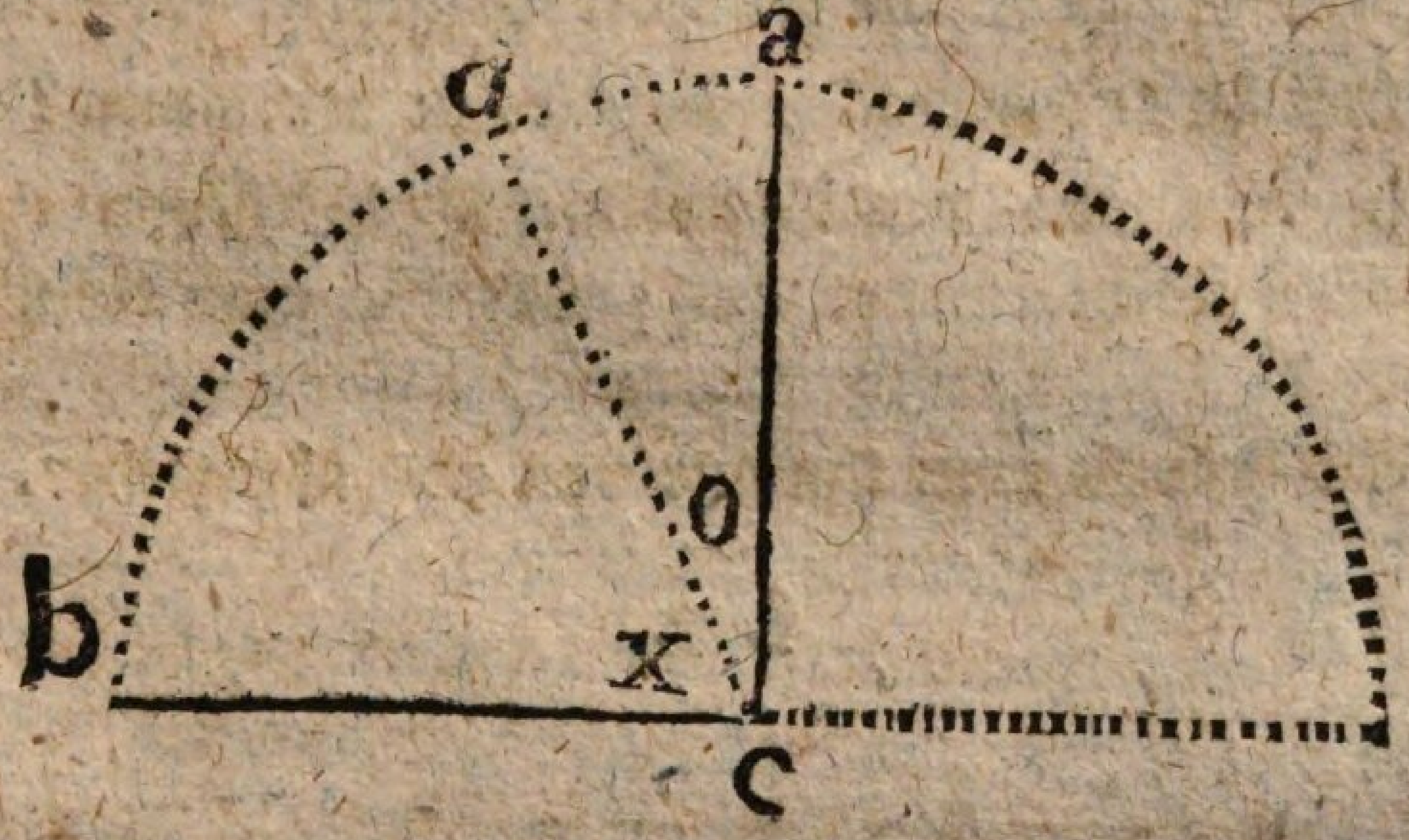
Wie weit muß er, nach §. 6. verlängert werden, um die Tang. und Sec. dadurch zu bestimmen?

So weit, bis die Sec. die Tang. durchschneidet. Wird das hier geschehen können?
Warum nicht?

Was folgt nun hieraus: wie groß ist die Tang. und Sec. eines Bogens von 90°?

Das kann man nicht bestimmt angeben.

§. 8.



Beträgt wol der Bogen db 90°?
Welches Bogenstück fehlt demnach daran, oder welches Bogenstück ergänzt es zu 90°?

da.

Dieses Bogenstück — hier da — welches man zu einem andern Bogenstücke — hier bd — geben muß, um 90 volle Grade zu erhalten, nennt man das Complement oder die Ergänzung desselben Bogens.

Und umgekehrt, durch welches Bogenstück wird wol da zu 90° vollständig ergänzt?

Durch bd.

Das Complement von da wäre also — — —?

bd.

Eben so ist es auch mit den beiden Winkeln x und o.
Welcher Winkel wäre nun wol der Complementswinkel von x?

Und welcher Winkel der Complementswinkel von o? Warum?

Wäre nun der Winkel x z. B. 60°; wie viele Grade würde denn der Winkel o enthalten?

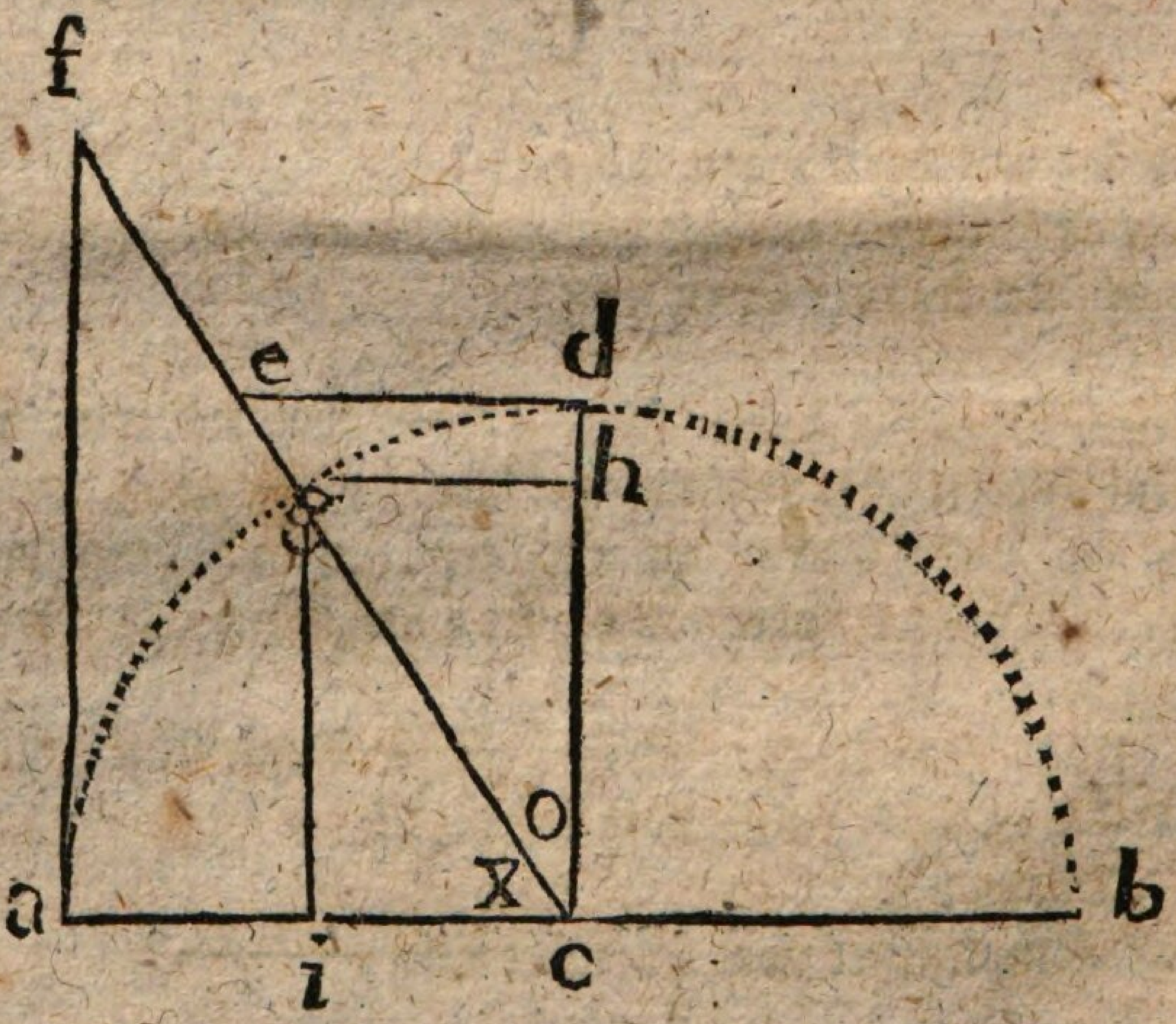
Oder wäre es bekannt, daß der Winkel o 30° enthielte; wie viele Grade würde denn der Winkel x enthalten?

Wie hast du das gemacht, um dies zu bestimmen?

Wenn man also den Complementswinkel von einem gegebenen Winkel haben will; was hat man denn nur zu thun?

So braucht man ihn nur von 90° abzuziehen.

§. 9.



Wie heißt in dieser vorgezeichneten Figur, der Sinus des Complementswinkels o?

gh.

Zu welchem Bogenstücke ist gh auch der Sinus?

Zu dem Bogenstücke gd.

gh ist der Sinus von o, und wird der Cosinus von x genannt.

So auch — wie heißt der Sinus von dem Complementswinkel x?

gi.

Dieser Sinus gi von x wird wieder der Cosinus von o genannt.

Also allgemein ausgedruckt — Welche Linie heißt nun der Cosinus?

Der Sinus eines Complementswinkels und also auch der Sinus eines Complementsbogens heißt der Cosinus.

Oder auch — gh war der Sinus von o, und der Cosinus von x. Welche Linie — s. Fig. — hat aber mit gh gleiche Länge? ic.

Warum müssen beide gleiche Länge haben? —

Was ist das Viereck ghci, für eine Figur nach §. 94. Geom.?

Und was folgt daraus für die einander gegenüberliegenden Seiten?

Welche Linie können wir also auch statt gh nehmen?

ic.

Da wir eben hatten, daß gh der Sinus von o und der Cosinus von x genannt wird, ic aber mit gh von gleicher Länge ist; welche Linie ist also auch der Cosinus von x?

ic.

Und von welcher Linie im Kreise ist ic ein Theil?

Vom Halbmesser ac.

Wo, im Kreise, liegt dieser Theil ic?

Er liegt zwischen dem Sinus und dem Mittelpunkte.

Eben so — welche Linie können wir statt hc nehmen?

gi.

Da wir auch eben hatten, daß gi, der Sinus von x, der Cosinus von o genannt wird, gi aber mit hc von gleicher Länge ist; welche Linie ist also auch der Cosinus von o?

Und von welcher Linie im Kreise ist hc auch ein Theil?

Vom Halbmesser dc.

Wo, im Kreise, liegt dieser Theil auch?

Zwischen dem Sinus und dem Mittelpunkte.

Nun zusammen genommen, welche Linie ist auch der Cosinus?

Der Cosinus ist derjenige Theil des Halbmessers, der zwischen dem Sinus und dem Mittelpunkte liegt.

Wie heißt die Tangente — s. Fig. — von dem Winkel x und dem Bogen ag?

Die Tangente heißt af.

Diese Tangente von dem ∠x ist die Cotangente von seinem Complementswinkel, hier o genannt.

Also die Tangente eines Complementswinkels oder Bogens heißt Cotangente.

So auch — wie heißt die Secante, s. Fig. von dem ∠x und dem Bogen ag?

Diese Secante von dem ∠x, ist die Cosecante von seinem Complementswinkel o.

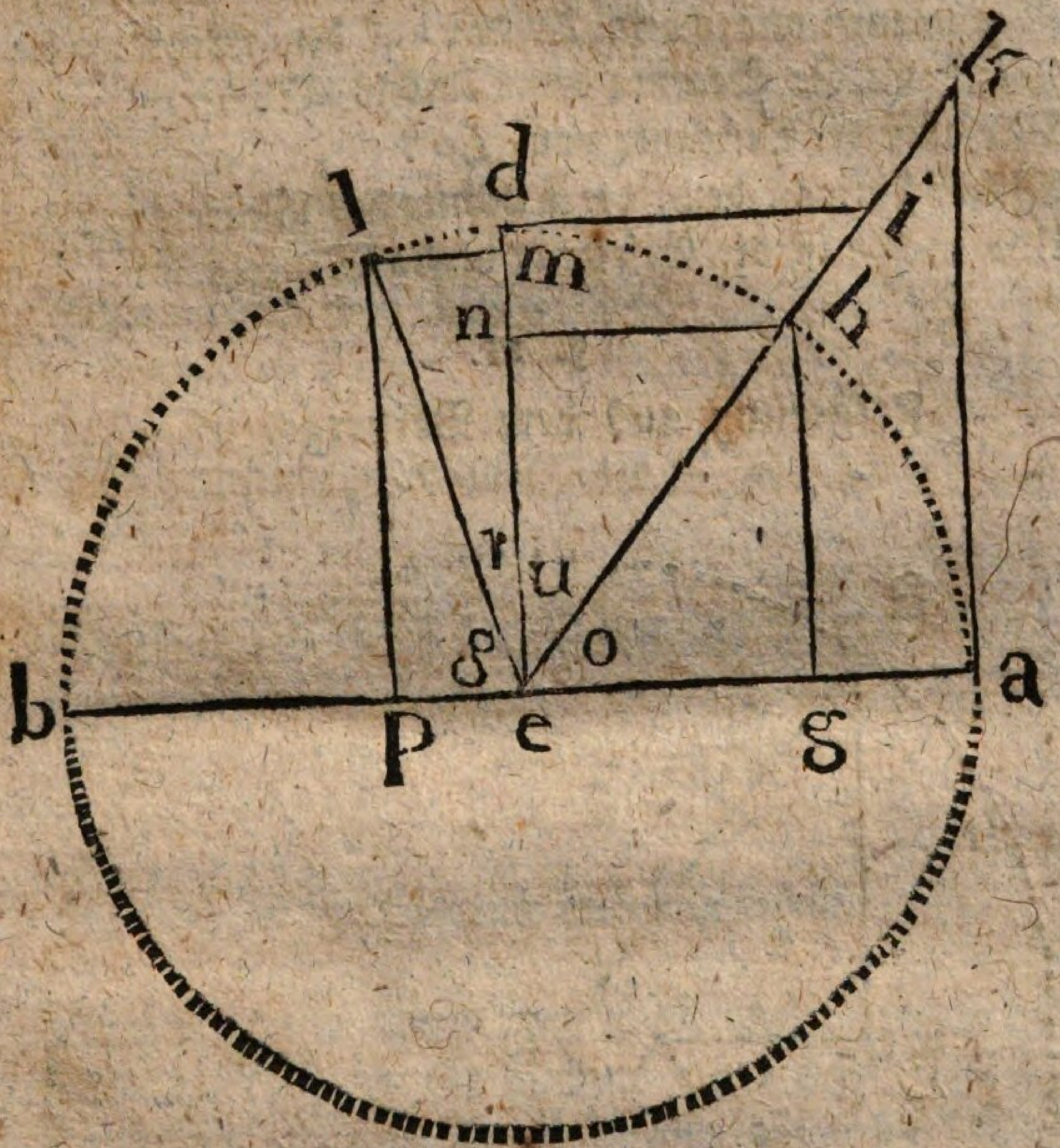
Also die Secante eines Complementswinkels oder Bogens wird Cosecante genannt.

Die Bezeichnung ist folgende:

Cosinus — cos.

Cotangente — cot., und
Cosecante — cosec.

§. 10.



Beantworte mir nun, zur Wiederholung des Gelernten folgende Fragen.

Welche Linie ist in der hier vorgezeichneten Figur der Sinus des Winkels o?

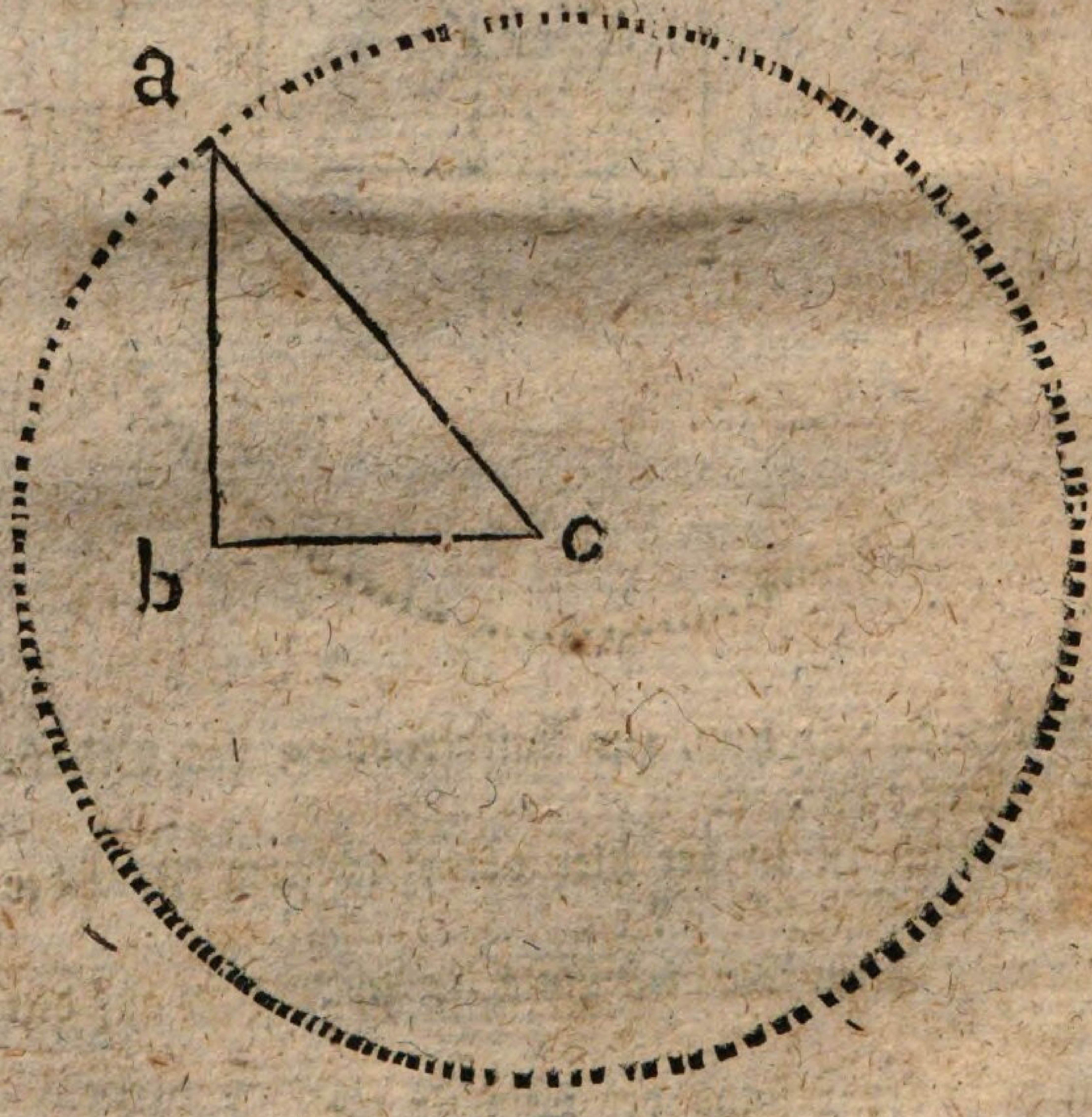
Und wie nennen wir diese Linie hg in Absicht auf den Winkel u?

Wie heißt der Cosinus des Winkels o?

Und der Sinus des Winkels u wäre —?
Zu welchem Winkel ist ka die Tangente?
Welche Linie ist die Cotangente des Winkels u?
Und welche trigonometrische Linie ist di?
Zu welchem Winkel ist di die Tangente?
Wie nennen wir di in Absicht auf den Winkel o?
Wie heißt die Secante des Winkels o?
Wie aber die Cosecante vom ∠o?
Welche Linie ist denn die Secante des Winkels u?
Und welche ist die Cosecante dieses Winkels u?

§. 11.

Folgerung aus dem Vorhergehenden.



Was für ein Dreieck ist abc, weil ab senkrecht auf dem Endpunkte von bc steht?

Und wie heißen, nach §. 122. Geom., die Seiten eines rechtwinklichten Dreiecks noch mit einem besondern Namen?

ab und bc sind Catheten.

ac heißt die Hypothenuse.

Mit welcher von diesen Linien ist hier nun ein Kreis beschrieben?

Welche trigonometrische Linie ist nun die Cathete ab?

Die Cathete ab ist der Sinus des Winkels acb.

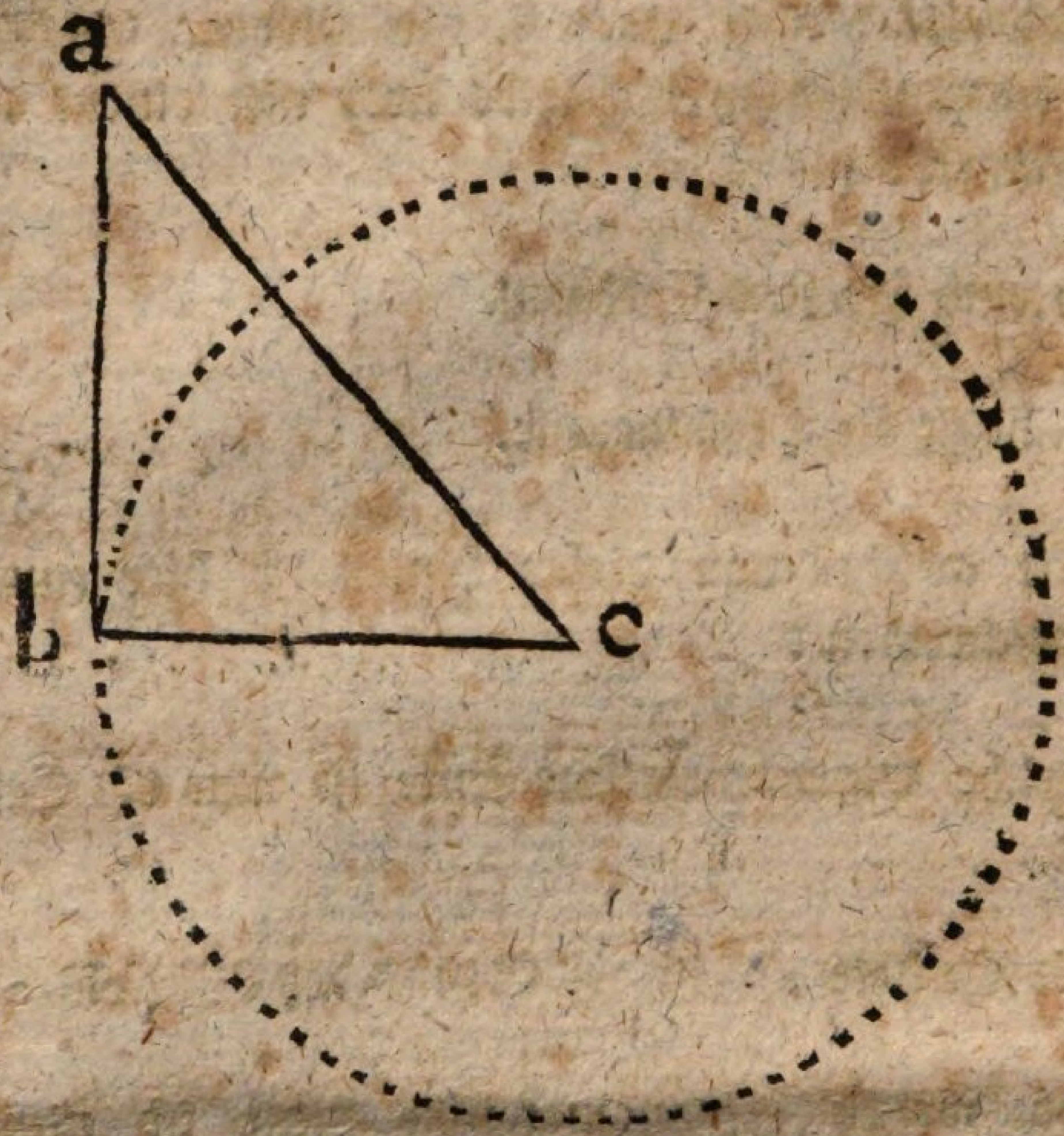
Und welche trigonometrische Linie ist nun die andere Cathete bc?

Und bc ist der Cosinus dieses Winkels.

Wenn also in einem rechtwinklichten Dreiecke die Hypothenuse desselben der Radius eines Kreises wird; welche trigonometrische Linien werden denn die beiden Catheten seyn?

Wenn in einem rechtwinklichten Dreiecke die Hypothenuse desselben der Radius eines Kreises wird: so ist die eine Cathete desselben Dreieckes der Sinus des Winkels am Mittelpunkte,

und die andere der Cosinus dieses Winkels.



Wenn aber, wie hier, in diesem rechtwinklichten Dreiecke die eine Cathete der Radius ist; welche trigonometrische Linie werden denn die andere Cathete und die Hypothenuse seyn?

So wird die andere Cathete allemal die Tangente, und die Hypothenuse die Secante seyn.

§. 12.

Nun noch einige Bemerkungen, die wir leicht machen werden, wenn wir die letztgezeichnete Figur etwas genauer betrachten.

Wenn die Tangente länger wird (wächst), was folgt denn daraus für die Länge der Secante?

Welchen Einfluß hat dies auf den Bogen?

Und auf den Winkel —?

So auch umgekehrt. — Wenn die Tangente kürzer wird (abnimmt); wie verändert sich denn auch die Secante?

Welche Veränderung entsteht dadurch mit dem Bogen?

Und mit dem Winkel?

Nun zusammen genommen: Die Tangenten und Secanten mit ihren Bögen und Winkeln wachsen und nehmen ab.

Ferner. s. Fig. §. 10.

Wenn der Sinus länger wird, was können wir denn von der Größe seines Winkels und Bogens behaupten?

Und was folgt daraus auch für die Tangente und Secante?

So auch umgekehrt, wenn der Sinus abnimmt — — —

Also wäre unsere 2te Bemerkung:

Die Sinusse mit ihren Bögen und Winkeln, und also auch mit den Tangenten und Secanten wachsen und nehmen ab.

Und wenn der Sinus (Sin. naturalis) mit seinem Bogen und Winkel wächst oder abnimmt, welchen Einfluß hat dies auf den Quersinus (Sin. versus)?

Also 3tens: Der Sin. naturalis und der Sin. versus wachsen und nehmen ab mit ihrem Winkel und Bogen.

Aber ist es auch richtig, wenn ich behaupte: je größer der Sinus (Sin. naturalis), desto größer der Cosinus?

Oder je kleiner der Sinus (Sin. naturalis), desto kleiner der Cosinus?

Also 5tens — —

Wie verhalten sich immer Cos. und Sin. versus im Wachsen und Abnehmen gegen einander?

Eigenschaften dieser trigonometrischen Linien.

§. 13.

Wir wollen die erste Figur hier gleich unten vor uns nehmen, und sehen ob du bei genauer Betrachtung und Anwendung des Bekannten nicht neue Sätze selbst finden und herleiten kannst.

Wie viele Dreiecke sind hier?

Wie heißen sie? acb, dce rc. rc.

Worin kommen diese beiden Dreiecke denn mit einander überein? —

Welchen Winkel haben sie gemeinschaftlich?

Was sind die Winkel bei b und e für Winkel, weil ab und de senkrechte Linien sind?

Worin kommen also diese beiden Dreiecke mit einander überein?

Daß sie 2, und also auch 3 gleiche Winkel haben.

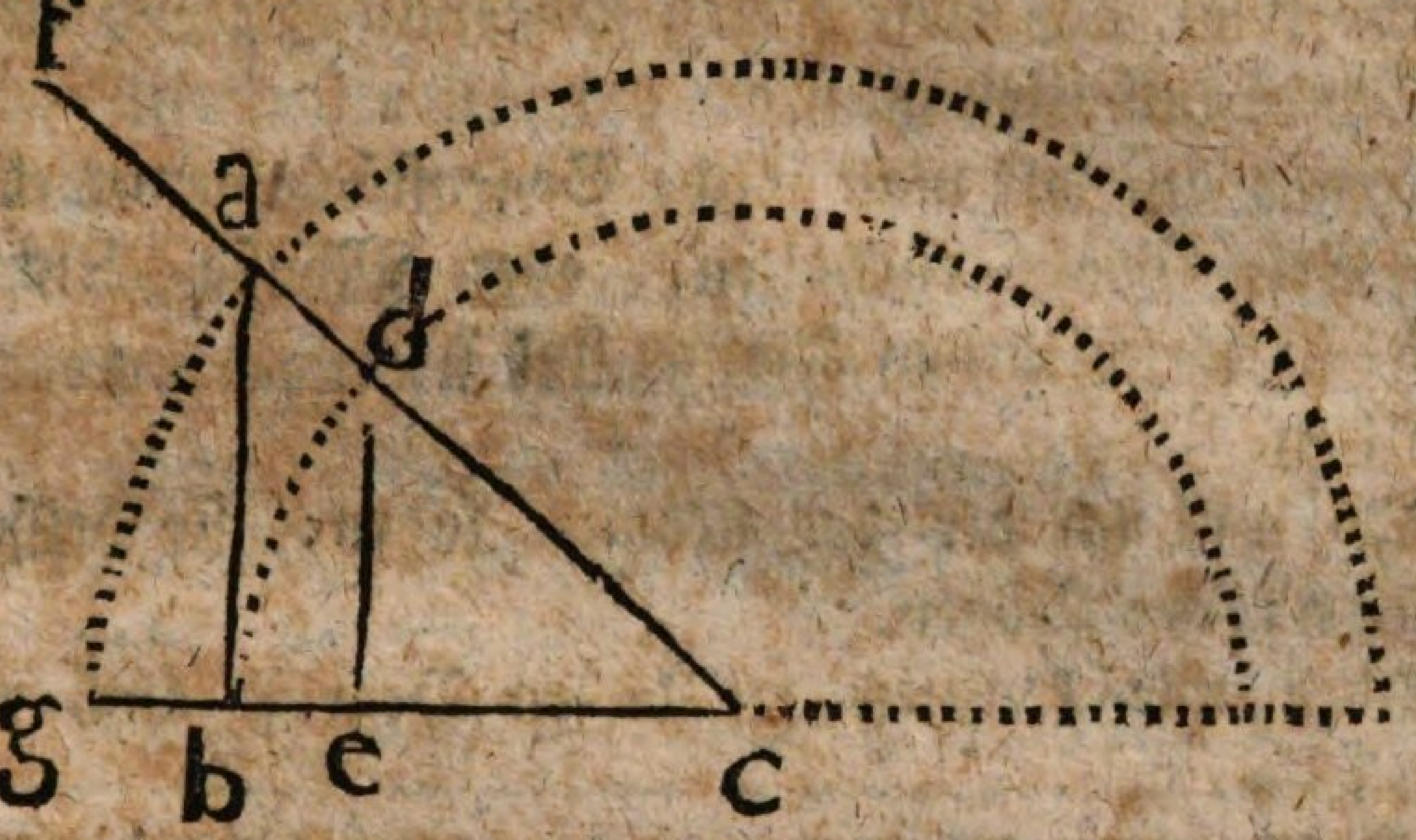
Und wenn wir wissen, daß zwei Dreiecke 2 oder 3 gleiche Winkel haben; was können wir denn, nach §. 159. Geom., von diesen Dreiecken behaupten?

So müssen sie einander ähnlich seyn.

Wie können wir also nun schließen?

de : dc = ab : ac.

Nun ist mit ac aus dem Punkte c noch ein halber Kreis beschrieben, und jetzt wollen wir weiter folgern.



Wir hatten:

$de : dc = ab : ac$

da $de = \text{Sin. } db$, und $ab = \text{Sin. } ag$;

---

so folgt, daß $\text{Sin. } db : dc = \text{Sin. } ag : ac$.

d. h.:

Die Sinusse der Bögen db und ag haben gegen ihre Radien einerlei Verhältniß.

Und wenn wir die Bogenstücke db und ag mit einander vergleichen, was werden wir denn leicht bemerken?

Sind sie Bogenstücke in einem und demselben Kreise?

Sondern —?

Welches Bogenstück ist das Maaß von dem Winkel dce?

Ist denn das Bogenstück db bloß das Maaß von diesem Winkel?

Sondern welches Bogenstück ist auch das Maaß davon?

Was folgt nun daraus: da beide Bogenstücke das Maaß von einem und demselben Winkel sind?

So folgt, daß diese beiden Bogenstücke gleich viele Grade enthalten müssen.

Weißt du, wie man solche Bogenstücke nennt, die gleich viele Grade enthalten, oder Maaße gleicher Winkel in verschiedenen Kreisen sind?

Nein.

So will ich dir den Namen sagen: sie heißen ähnliche Bögen.

Oder wie könntest du diesen Begriff auch erklären? —

Z. B. Das Bogenstück db enthielte 45°; was für ein Theil wäre es also von seinem ganzen Bogen?

Da nun das Bogenstück ag in dem andern Kreise auch 45° enthält; der wie vielste Theil ist denn auch das Bogenstück von seinem Kreise?

Was lernst du hieraus, wie können wir auch den Begriff ähnliche Bögen erklären?

Aehnliche Bögen sind solche Bögen, verschiedener Kreise, die zu ihrer Peripherie einerlei Verhältniß haben.

Wie verhalten sich nun also die Sinusse ähnlicher Bögen zu ihren Halbmessern?

Die Sinusse ähnlicher Bögen haben gegen ihre Halbmesser einerlei Verhältniß.

Anmerk. Bisweilen findet man diesen Satz bloß auf den Sinus eingeschränkt. Wir wollen sehen, ob wir ihn nicht weiter ausdehnen können, und das-

selbe auch von den Tangenten, Secanten u. s. w. behaupten können.

Betrachte die beiden Dreiecke abc und fgc in der letztgezeichneten Figur genauer; welche Winkel sind sich gleich?

Wie viele Winkel sind also in beiden Dreiecken einander gleich?

Und was können wir deswegen, nach §. 159. Geom., von den beiden Dreiecken behaupten?

Beide Dreiecke sind einander ähnlich. Welche Verhältnisse folgen nun hieraus?

ab : bc = fg : gc.

ab = Tang. db, und fg = Tang. ag.

---

folglich, die Tang. db : bc = Tang. ag : gc.

d. h.:

die Tangenten der Bögen db nnd ag haben gegen ihre Radien einerlei Verhältniß.

Was lernen wir hieraus: wie verhalten sich nun also, allgemein ausgedruckt, die Tangenten ähnlicher Bögen zu ihren Halbmessern?

Die Tangenten ähnlicher Bögen haben gegen ihre Halbmesser einerlei Verhältniß.

Und da wir wissen, daß die eben genannten Dreiecke abc und fgc einander ähnlich sind; wie verhält sich daher auch ac zu bc?

Daher ac : bc = fc : gc.

d. h.:

Die Secanten der Bögen db und ag haben gegen ihre Radien einerlei Verhältniß.

Und wie verhalten sich also die Secanten ähnlicher Bögen zu ihren Halbmessern?

Die Secanten ähnlicher Bögen haben auch gegen ihre Halbmesser einerlei Verhältniß.

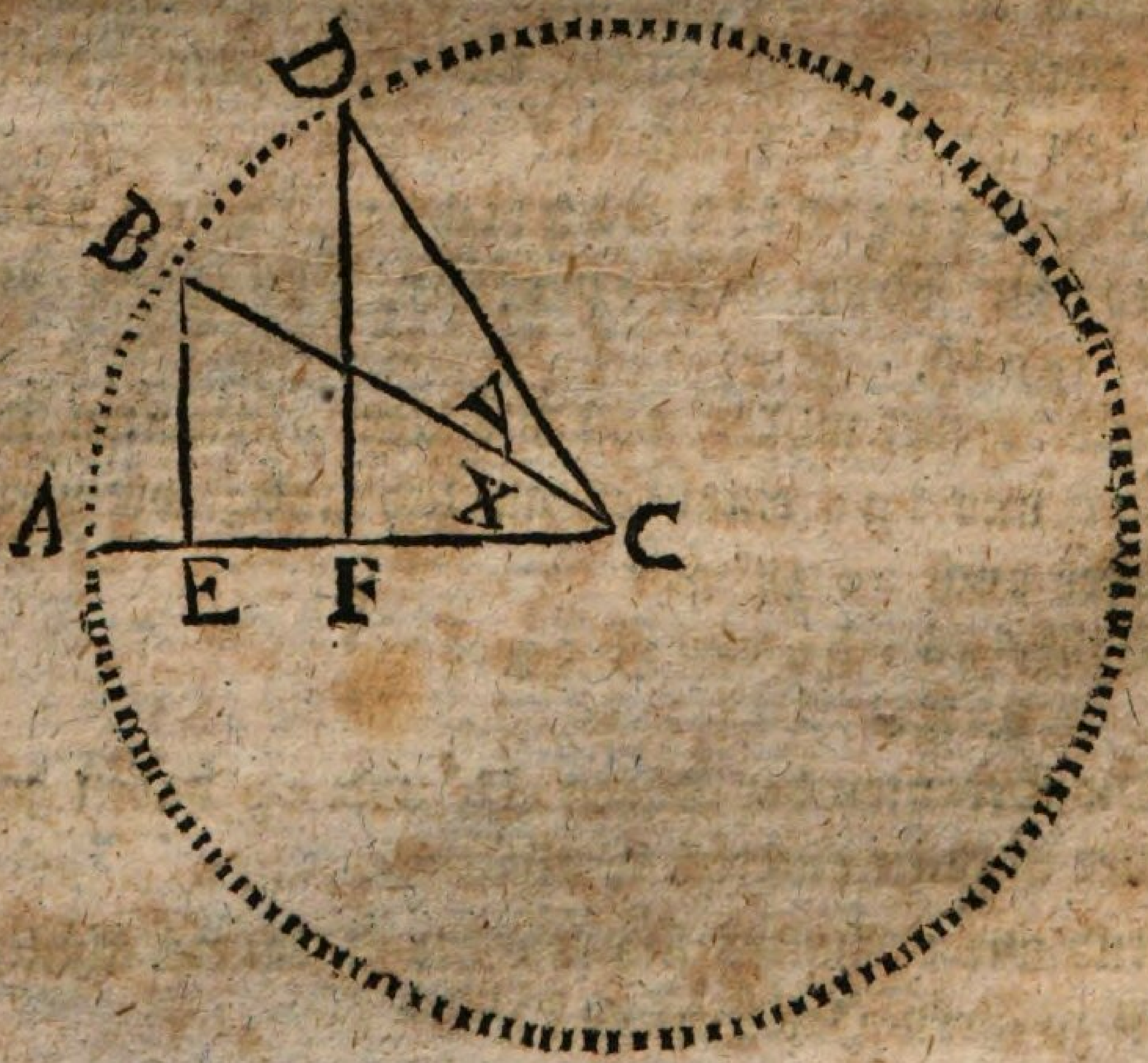
Weil Sin., Tang. und Sec. auch zugleich Cos., Cot. und Cosec. in Absicht des Complements sind; wie verhalten sie sich denn auch gegen ihre Halbmesser?

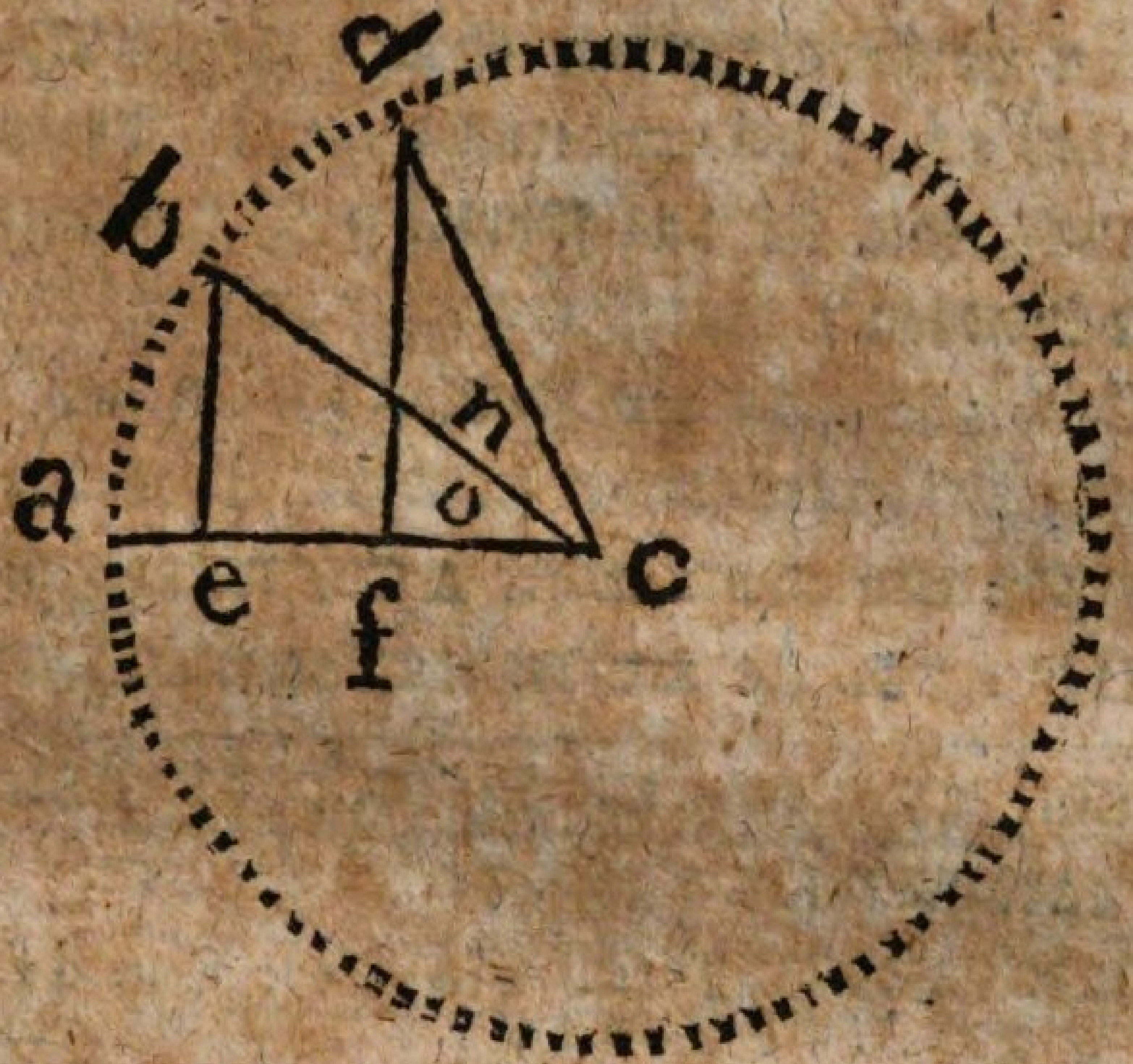
Wie können wir nun unsern Satz mehr allgemein ausdrucken?

Alle trigonometrische Linien ähnlicher Bögen haben gegen ihre Halbmesser einerlei Verhältniß.

---

§. 14.





Welche trigonometrische Linien sind BE und DF? So auch in dem andern Kreise be und df?

Von welchen Bögen oder von welchen Winkeln sind dies Sinusse?

Wir haben hier also 2 Sinusse in einem Kreise — und 2 Sinusse in einem andern Kreise. —

Es sind aber Sinusse von ähnlichen Bögen oder von gleichgroßen Winkeln. —

Und die Frage ist nun: wie verhalten sich diese Sinusse gegen einander? —

Welcher Winkel hat, nach der Voraussetzung, gleiche Größe mit $\angle x$?

Und wie verhält sich auch y zu n?

$$\angle x = \angle o$$
$$\angle y = \angle n;$$

folglich $x + y = o + n$.

Wie müssen sich nun verhalten Sin. BE zum Sin. DF?

Wie verhalten sich die Sinusse BE und be, nach unserm eben vorhergehenden Satze, gegen einander?

Sin. BE : Sin. be = Radius AC : Rad. ac.

Und so auch wie ist das Verhältniß der andern Sin. gegen ihre Radien?

Sin. DF : Sin. df = Rad. AC : R. ac.

Da

Sin. BE : Sin. be = R. AC : R. ac, und
Sin. DF : Sin. df = R. AC : R. ac;

---

folglich; Sin. BE : Sin. be = Sin. DF : Sin. df.

Und daraus folgt wieder:

Sin. BE : Sin. DF = Sin. be : Sin. df.

d. h.:

Die Sinusse ähnlicher Bögen oder gleicher Winkel in verschiedenen Kreisen haben einerlei Verhältniß oder Größe unter sich.

Es ist nun die Frage: gilt dies, was nun von den Sinussen besonders bewiesen ist auch von den Tangenten und Secanten ähnlicher Bögen in verschiedenen Kreisen? —

Dies will ich dir nun einmal gänzlich allein zur Untersuchung überlassen.

Und weil endlich alle Sinusse, Tangenten und Secanten wiederum Cosinusse, Cotangenten und Cosecanten sind: welches Verhältniß werden denn überhaupt alle trigonometrische Linien ähnlicher Bögen oder gleicher Winkel in verschiedenen Kreisen haben?

Alle trigonometrische Linien ähnlicher Bögen oder gleicher Winkel in verschiedenen Kreisen haben einerlei Verhältniß oder Größe unter sich.

Wiederhole mir nun noch einmal diesen allgemeinen Lehrsatz von den trigonometrischen Linien gegen ihre Radien?

Alle &c. &c.

Die trigonometrischen Linien stehen also im Verhältnisse mit den Halbmessern. Wenn ich also z. B. einen Halbmesser in 100 gleichgroße Theile zerlege; welche Linien enthalten denn auch eine gewisse Anzahl von diesen gleichen Theilen?

Die Sinusse &c. &c.

Der Sinus eines Winkels von 39°48′ würde wol 64 von solchen gleichgroßen Theilen enthalten.

Nun wäre aber in einem andern Kreise der Halbmesser in 340 gleiche Theile zerlegt; wie könnte man nun schließen, um die Größe der Sin. &c. &c. zu finden?

100:64=340: zu der zu findenden Anzahl solcher gleichen Theile des Sinusses von 39°48′.

Wie heißt also eine 2te Folgerung aus dem vorigen allgemeinen Lehrsatz?

Wenn man jeden Halbmesser mehrerer Kreise in eine Anzahl gleicher Theile zerlegt; so müssen die Sinusse, Tangenten und Secanten ähnlicher Bögen eine Anzahl von solchen Theilen enthalten.

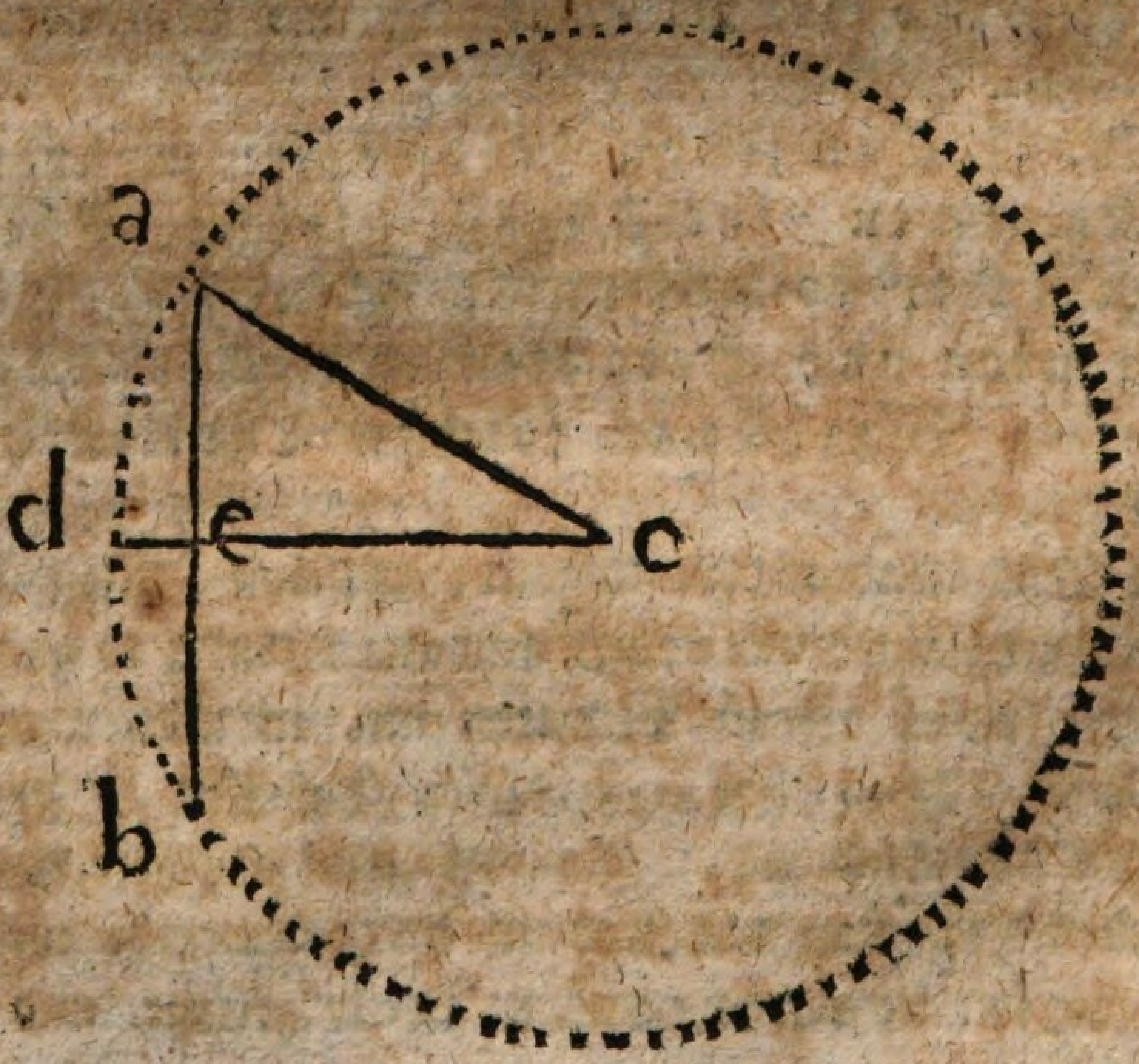
Diese Verhältnisse der trigonometrischen Linien sind wirklich in Zahlen bestimmt, für alle Winkel in ganzen Graden sowol, als in Minuten und in noch kleinern Theilen. Man hat von diesen Tabellen 2 Arten: größere und kleinere. In den gewöhnlichen kleinen Tabellen hat man den Radius in 10,000000; und in den größern in 10000,000000 Theile zerlegt, und da-

durch, wiewol sehr mühsam berechnet, wie viele solcher Theile auf die Sinusse Tangenten und Secanten der spitzigen Winkel gehen; für die stumpfen Winkel hat man nicht die Linien berechnen dürfen, weil sie mit denen der spitzigen schon gefunden waren: denn diese haben eben die Sin., Tang. und Sec. wie die, welche mit ihnen 180° ausmachen. Von dieser sauern Arbeit müssen wir uns doch eine deutliche Vorstellung zu machen suchen, um den Werth dieser Tabellen recht würdigen zu können, und in Ermangelung derselben sich selbst helfen zu können, oder um die etwanigen Fehler zu prüfen.

Was ist es für ein regulaires Vieleck im Kreise, wovon eine Seite gleiche Länge mit dem Halbmesser hat?

Das regulaire Sechseck hat rc. rc.

Wäre nun der Halbmesser z. B. in 100 gleiche Theile zerlegt; wie viele solcher Theile enthielte denn eine Seite des regulairen Sechseckes?



Welches Bogenstück gehört denn hier zu der Seite (Sehne) des regulairen Sechseckes?
Und der wie vielste Theil ist dieses Bogenstück von der ganzen Peripherie?
Wie viele Grade enthält es also?
In welche Theile zerlegt aber der Halbmesser die Sehne, und also auch den dazu gehörigen Bogen?

In 2 gleiche Theile;
a e ist also die halbe Sehne eines Bogens von 60°.

Und was ist a e für eine trigonometrische Linie in Absicht des Bogens a d?
Wie haben wir nun den Sinus eines Winkels von 30 Graden gefunden?

Wir haben die Seite des regulairen Sechseckes (Sehne) halbirt. Und da der Halbmesser damit gleiche Länge hat, welche Linie hätten wir denn auch gleich halbiren können?

Zerlegte man also z. B. den Halbmesser in 100 gleiche Theile; wie viele solcher Theile würde denn der Sinus eines Bogens von 30° enthalten?

50 solcher gleichen Theile.

Da nun in den gewöhnlichen kleinen Tabellen der Halbmesser in 10,000000 Theile zerlegt ist; wie viele solcher Theile enthält also der Sinus eines Winkels von 30°?

5,000000.
So könnte man also leicht den Sinus eines Winkels von 30° finden.

Betrachte unsere so eben gezeichnete Figur noch einmal; welche trigonometrische Linien sind uns nun bekannt?

ac, und cd als Halbmesser;

ae, und eb als Sin.

Welche Linie ist uns aber noch unbekannt zu finden? ec.
Was ist ec für eine trigonometrische Linie in Absicht des Bogens ad von 30°?

ec ist der Cos. des Bogens ad von 30°.

Oder welches einerlei ist: der Sinus des Complementswinkels, hier von 60°.

Wie finden wir nun wol die Größe des Cos. ec? —
Was ist aec für eine Figur?
Und was ist, nach dem sogenannten Pythagoräischen Lehrsatze uns bekannt von einem rechtwinklichten Dreiecke?

Also das Quadrat von ac ist gleich den beiden Quadraten von ae und ec zusammen genommen.

(Vergeß' nicht; was sollten wir noch finden?) Können wir dies nun nicht aus dem so eben genannten Satze folgern, daß nämlich das Quadrat von ac gleich ist den beiden Quadraten von ae + ec? —
Wenn wir das Quadrat von ae wegnehmen von dem Quadrate von ac; was bleibt denn als Rest?

So bleibt das Quadrat von ec als Rest.

Wir suchen aber nicht das Quadrat von ec; sondern bloß die eine Seite ec — Wie können wir die nun wol aus dem Quadrate finden?

Indem wir aus dem Quadrate von ec die Quadratwurzel ziehen.

Nun zusammen kurz wiederholt:

$$ac^2 = ae^2 + ec^2$$
$$ae^2 = ae^2$$
$$ac^2 - ae^2 = ec^2$$
$$\sqrt{(ac^2 - ae^2)} = ec$$

Nun ist aber ac der Radius oder Sin. tot.; ae der Sin.; und ec der Cos.; folglich heißt jene angeführte Gleichung übersetzt:

Man findet den Sin. eines Winkels von 60° (oder Cosin. eines Winkels von 30°), wenn man den Sin. tot. quadrirt, und hiervon das Quadrat des Sin. des Winkels von 30° subtr., und aus dieser Differenz die Quadratwurzel ziehet, also

der Sin. tot. = 10,000000 im Quadrat
der Sin. von 30° = 5,000000

75000,000,000,000

√) 8,660254 ist also

der Sin. eines Winkels von 59°60', oder 60°.

Jetzt wollen wir sehen, ob dies mit den Tabellen übereinstimmt.

§. 15.

Sind uns nun alle Linien in der letztgezeichneten Figur bekannt, oder wissen wir sie alle durch Rechnen zu finden?

Nein, noch fehlt das kleine Stück de.

Wie nannten wir dieses Stück des Halbmessers?

Quersin., oder Sin. versus.

Welche trigonometrische Linie macht dieser Quersinus mit dem, im vorigen §., gefundenen Cosinus?

Den Halbmesser.

Da uns nun die Länge des Halbmessers und des Cosin. bekannt ist; wie finden wir denn daraus die Größe des Sin. versus?

Wir finden den Quersinus, wenn wir den Cosin. desselben Winkels von dem Halbmesser subtrahiren.

Anmerk. Diesen Sin. versus findet man in den Tabellen nicht berechnet, welches aber auch gar nicht nöthig ist. Es würde nur den Werth der Tabellen erhöhen, uud man kann ihn leicht selbst finden.

§. 16.

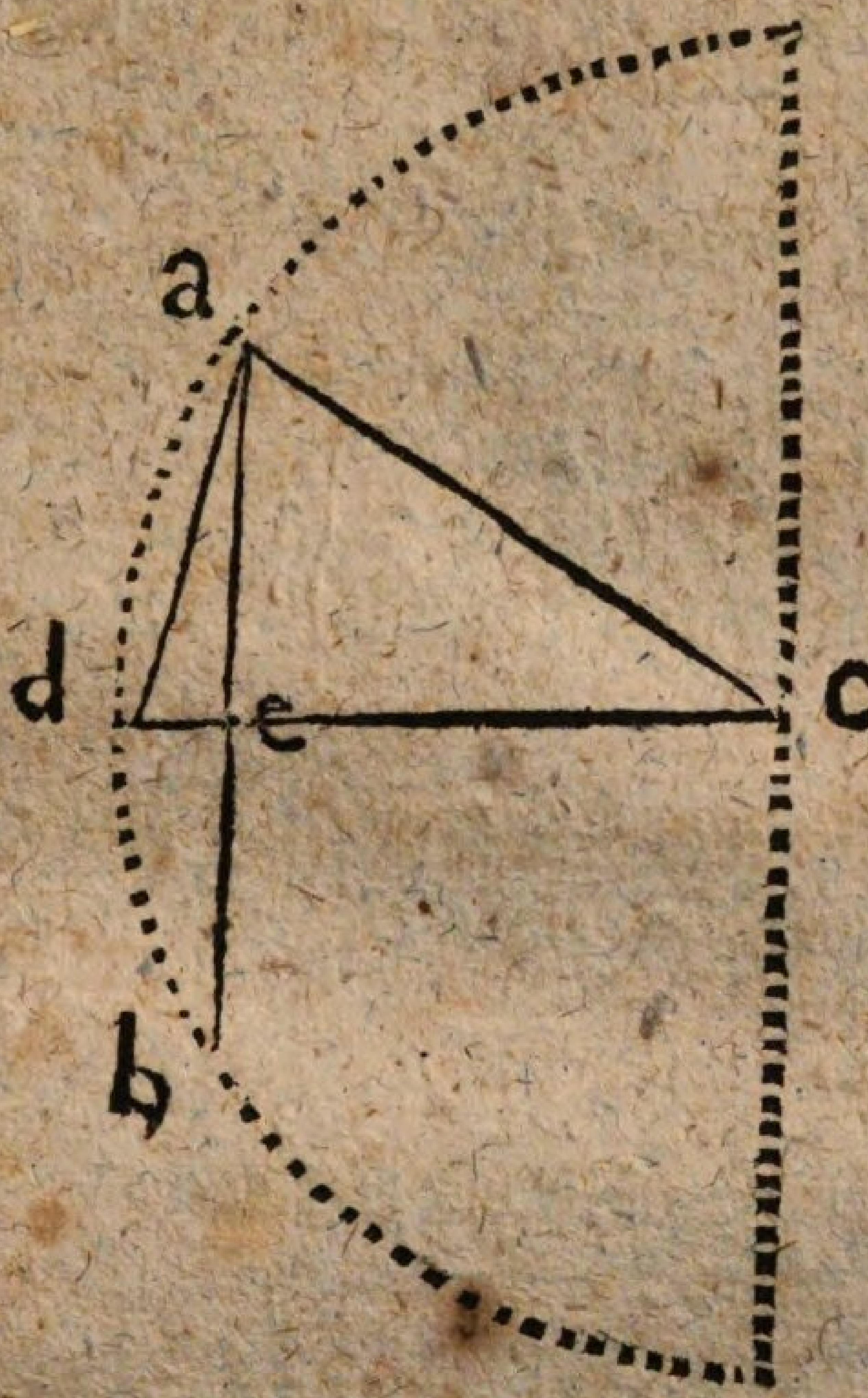
Welche Hülfslinien zogen wir — s. die letztgezeichnete Fig. — um den Sin. eines Winkels von 30° zu finden?

Wir zogen erst die Sehne eines Bogens von 60°.

Welche Sehne hätten wir also jetzt wol zu ziehen, um den Sin. eines Winkels von halb so viel Graden zu finden?

Wir müßten wol die Sehne eines Bogens von halb so viel Graden, also von 30° ziehen.

Gut! Dies wollen wir nun erst thun, und sehen, wohin dies führt.



Die Hälfte von der Sehne, welche wir im vorigen §. zogen, war der Sinus eines Winkels von 30°. Dies hier nun angewandt. Die Hälfte von dieser nun gezogenen Sehne ad muß der Sinus eines Winkels von 15° seyn.

Was ist nun aber, nach dem Pythagoräischen Lehrsatze, von dem rechtwinklichten Dreiecke aed bekannt?

Wir wissen, daß das Quadrat der Hypothenuse ad gleich ist den beiden Quadraten der Catheten ae und de.

Was folgt hieraus, welche Größe ist denn gleich der Hypothenuse ad?

Die Quadratwurzel aus den beiden Quadraten der Catheten zusammen genommen.

Und die Hälfte der Hypothenuse ad wäre gleich — —?

der Hälfte von dieser Quadratwurzel.

Nun zusammen wiederholt: wie findet man den Sinus eines Bogens von 15°?

Wenn man den Sinus eines Winkels von 30° quadrirt; dazu das Quadrat des Sin. versus addirt; dann hieraus die Quadratwurzel ziehet; und endlich von dieser Quadratwurzel die Hälfte nimmt.

Berechne dies nun hiernach selbst und sage mir, wie viel beträgt der Sin. eines Bogens von 15°?

2588190.

Und wie wäre nun hieraus wol der Sin. eines Winkels von $7\frac{1}{2}$° zu finden? — —

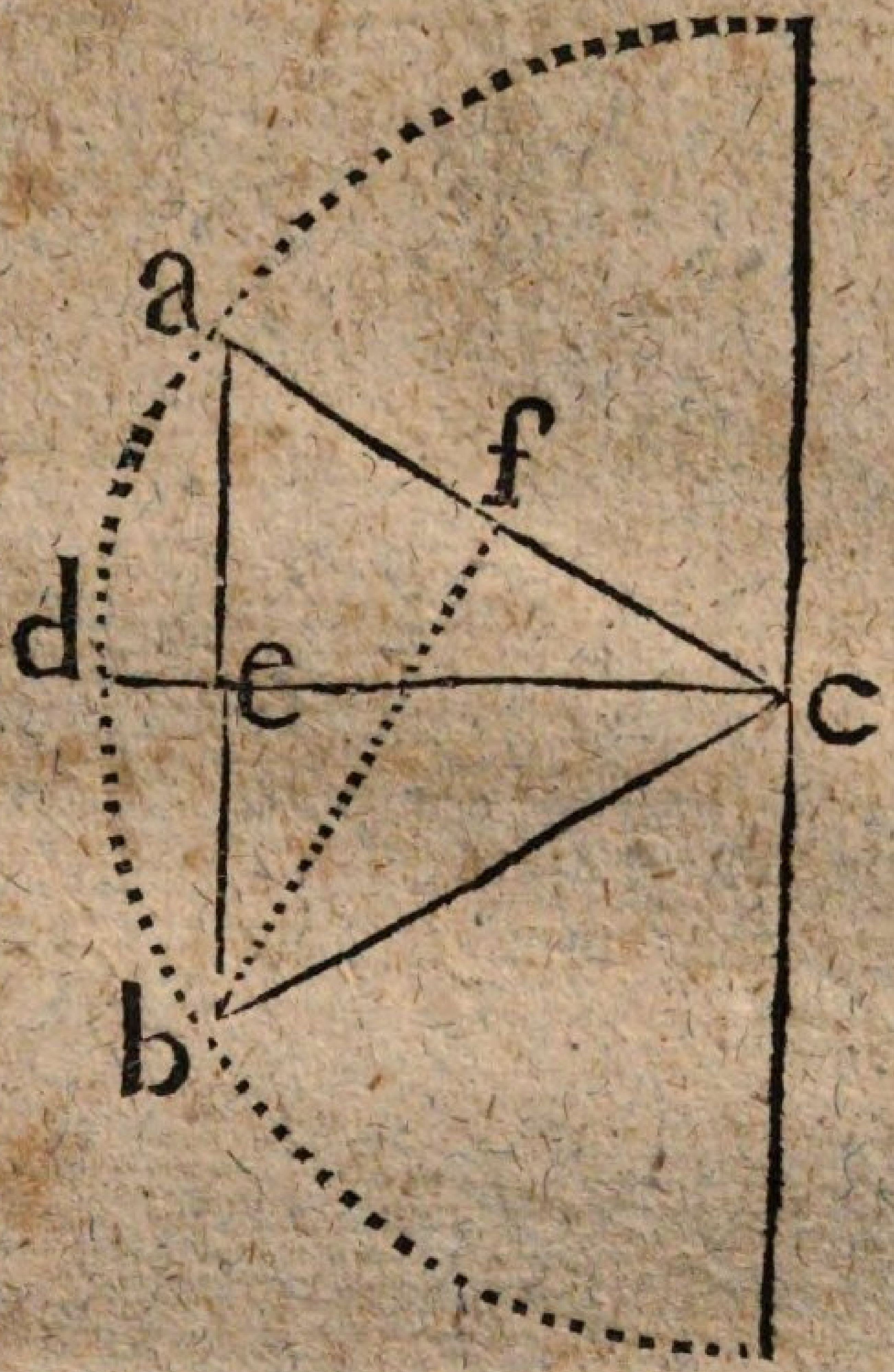
Was lernst du hieraus; welche bekannte Größe benutzen wir, um den Sinus eines uns unbekannten halb so großen Winkels zu finden?

Sinus und Quersinus.

Also wie läßt sich nun überhaupt aus dem Sinus und Quersinus eines Winkels, der Sinus eines halb so großen Winkels finden?

§. 17.

Jetzt will ich dir einige Winke geben, um zu sehen, ob du nun nicht selbst den Sin. eines doppelt so großen Winkels, nemlich von 60°, zu finden vermagst.



Wenn eine senkrechte Linie von b auf den Halbmesser ac gezogen würde, so sind die beiden Dreiecke einander ähnlich, weil ꝛc. ꝛc.

Wir können deswegen schließen: es verhält sich ꝛc. ꝛc.

d. h.:

Auf diese Art findet man also die trigonometrischen Linien der Winkel von 60° und 30°; und hieraus wieder den Sin. eines Winkels von 15°; und daraus den von $7\frac{1}{2}$° u. s. w.

Alle diese trigonometrischen Linien der eben genannten Winkel lassen sich aus der Seite des Sechseckes herleiten.

Eben so kann man auch aus der Seite eines Vier-

eckes den Sin. eines Winkels von 45°, von 22°30′ u. s. w. nach derselben Operation finden.

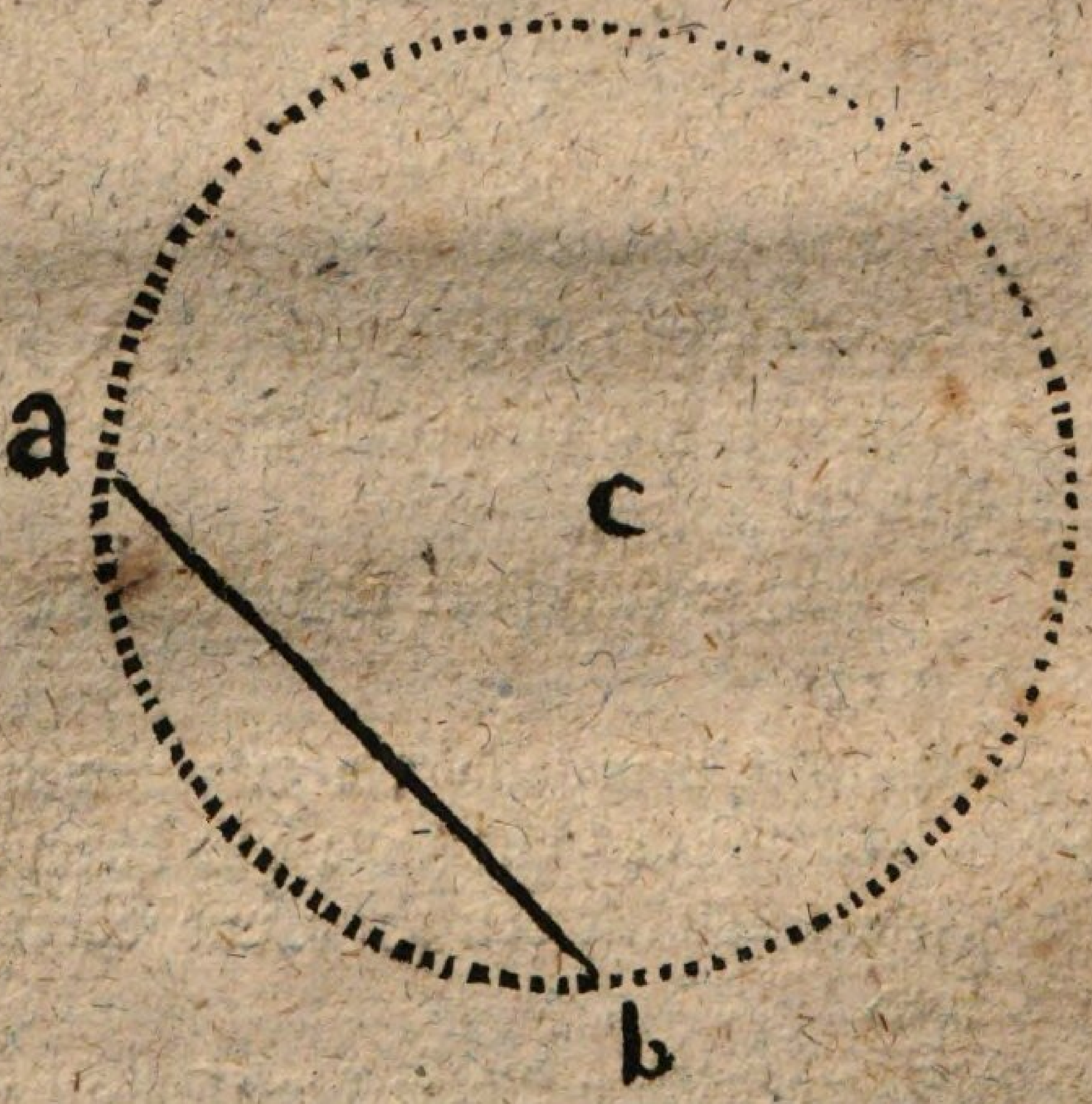
Denn angenommen, wir sollen den Sin. eines Winkels von 45° finden; wie erhalten wir den wol? — Wie erhielten wir, im §. 14., den Sin. eines Winkels von 30°?

Wir zogen erst die Sehne eines Bogens von 60°; halbirten 2c. 2c.

Was könnten wir denn nun wol thun, um den Sin. eines Winkels von 45° zu finden?

Wir müßten wol die Sehne eines Bogens von 90° ziehen.

Das wollen wir nun erst thun, und dann weiter folgern. z. B.:



ab sey also die Sehne eines Bogens von 90°.

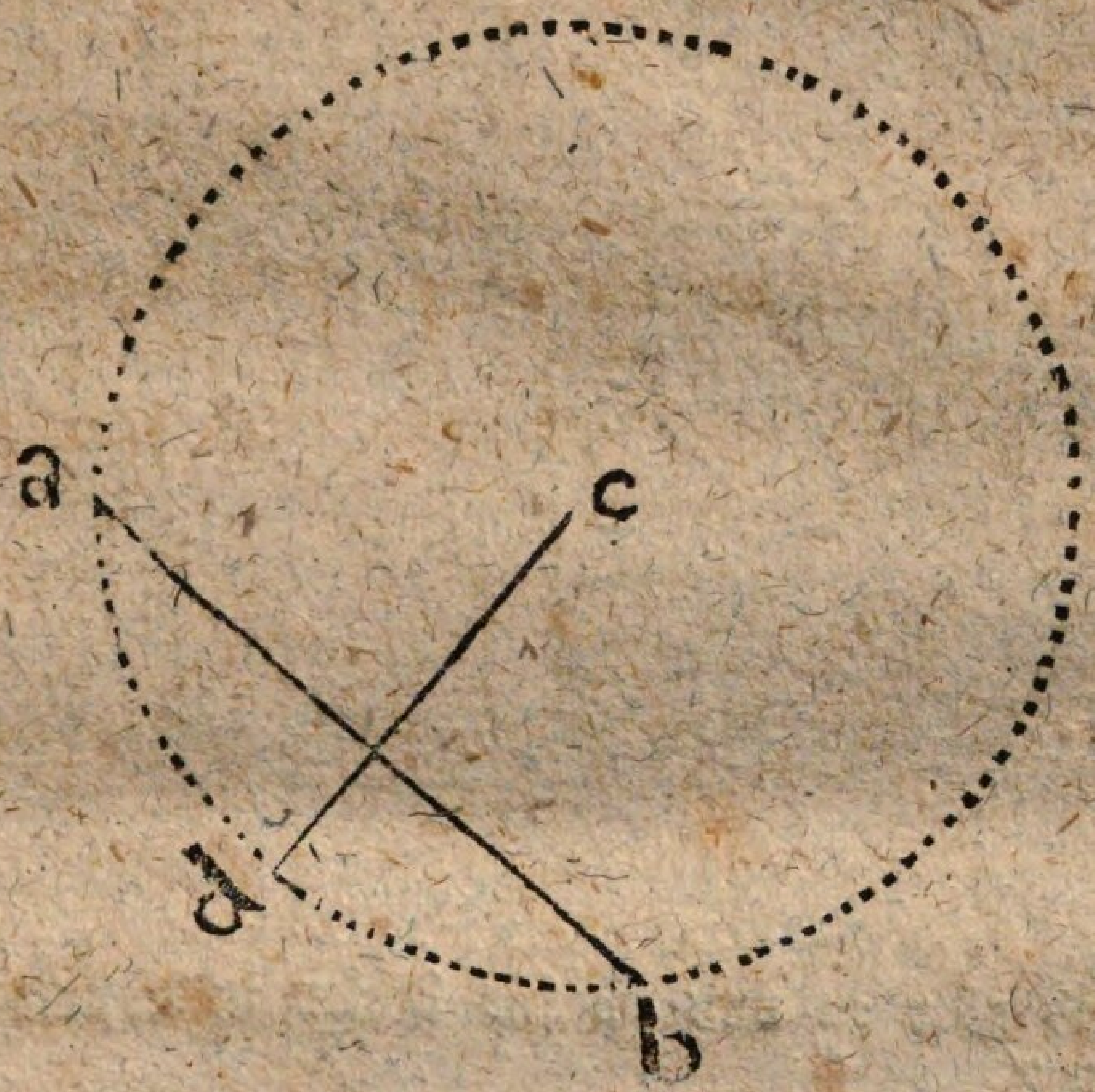
Was thaten wir ferner, im §. 14., um den Sin. von 30° zu finden?

Wir zogen von dem Mittelpunkte eine senkrechte Linie auf die Sehne.

Was müssen wir nun auch hier wol thun?

Auch ꝛc.

Also von c eine senkrechte Linie auf a b.



Wie theilt diese senkrechte Linie nun die Sehne, und auch den dazu gehörigen Bogen a b?

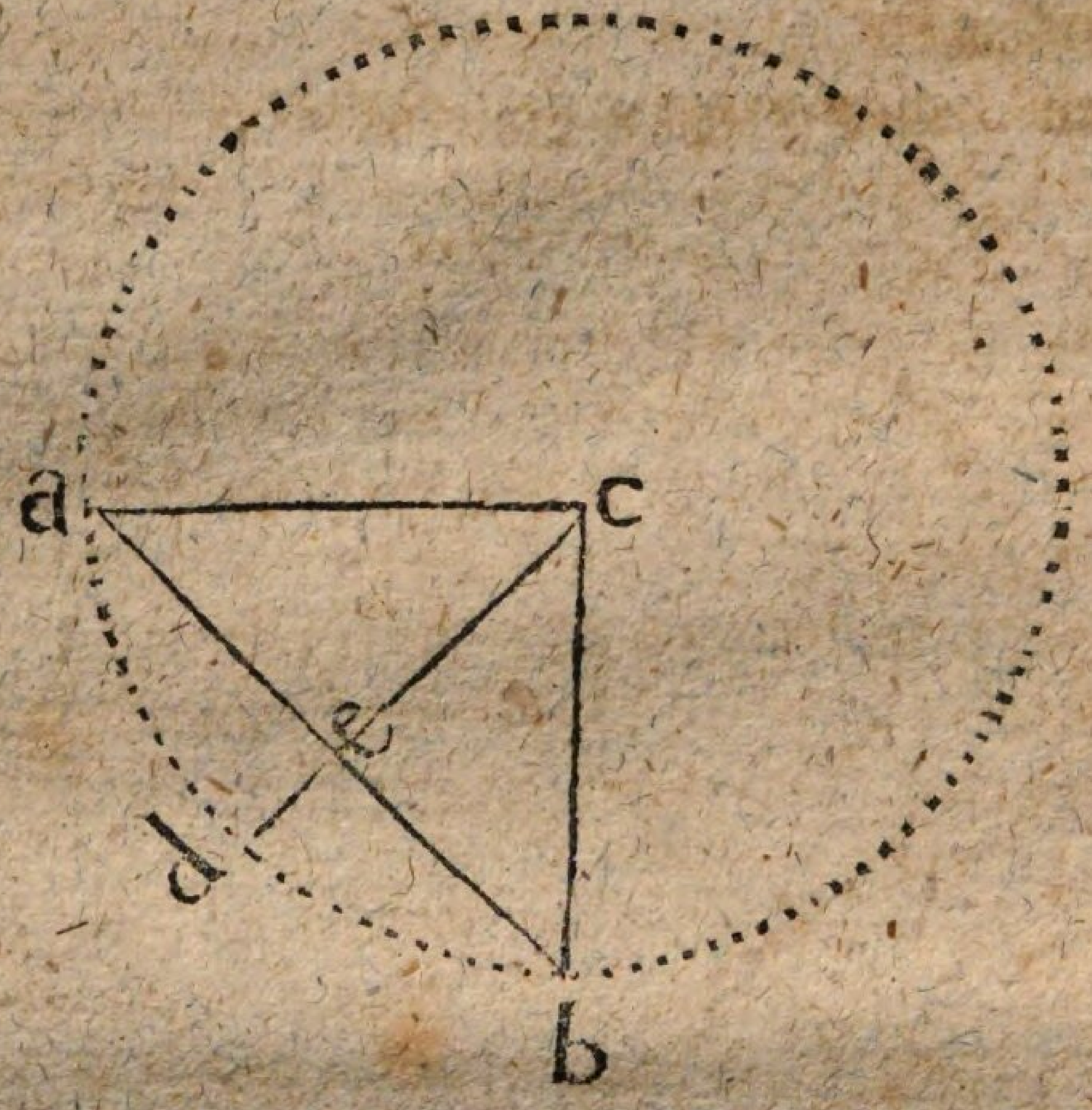
Die senkrechte Linie theilt sowol die Sehne a b, als auch den dazu gehörigen Bogen a d b in 2 gleiche Theile.

Da nun der Bogen a d b 90° beträgt, von welchem Bogenstücke muß a e — s. unten — also der Sin. seyn?

So muß a e der Sin. eines Bogens von 45° seyn. Ziehen wir nun von c nach a und b gerade Linien, so erhalten wir dadurch ein rechtwinklichtes Dreieck,

und was ist uns — nach dem Pythagoräischen Lehrsatze — davon bekannt?

Daß das Quadrat von a c 2c.



Was sind aber c a und c b für Linien in Absicht auf den Kreis?

Es sind Halbmesser.

Und was können wir deswegen von ihrer Länge behaupten, wenn wir sie mit einander vergleichen?

Daß sie gleiche Länge haben.

Weil die Halbmesser sich gleich sind; wie müssen sich denn auch ihre Quadrate gegen einander verhalten?

Auch ihre Quadrate müssen gleich groß seyn.

Das Quadrat von c a ist also gleich den beiden gleichgroßen Quadraten, oder — welches einerlei ist — a e doppelt.

Wir folgern weiter: da die Quadrate sich gleich sind; was können wir denn von ihren Wurzeln behaupten?

So sind ihre Wurzeln sich auch gleich, also $ab = \sqrt{2ac^2}$.

Weil die Ganzen sich gleich sind; wie müssen sich denn auch ihre Hälften gegen einander verhalten?

So müssen ihre Hälften sich auch gleich seyn, also $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{2ac^2}$.

Und wie wir eben hatten, die Hälfte von ab ist der Sin. von 45°, also ist der Sin. von $45° = \frac{1}{2}\sqrt{2ac^2}$.

d. h.:

Wir finden den Sin. eines Winkels von 45°, wenn wir das doppelte Quadrat des Halbmessers oder Sin. tot. nehmen, hieraus die Quadratwurzel ziehen, und diese Wurzel halbiren.

Berechne nun einmal selbst den Sin. eines Winkels von 45°, und du wirst finden, daß er 7071068 beträgt.

Was folgt nun, nach dieser letztgezeichneten Figur, wie verhalten sich Sin. und Cos. gegen einander? —

Worin kommen die beiden Dreiecke aec und acb mit einander überein?

Beide Dreiecke haben 2, also auch 3 gleiche Winkel.

Und solche Dreiecke nennen wir daher —?

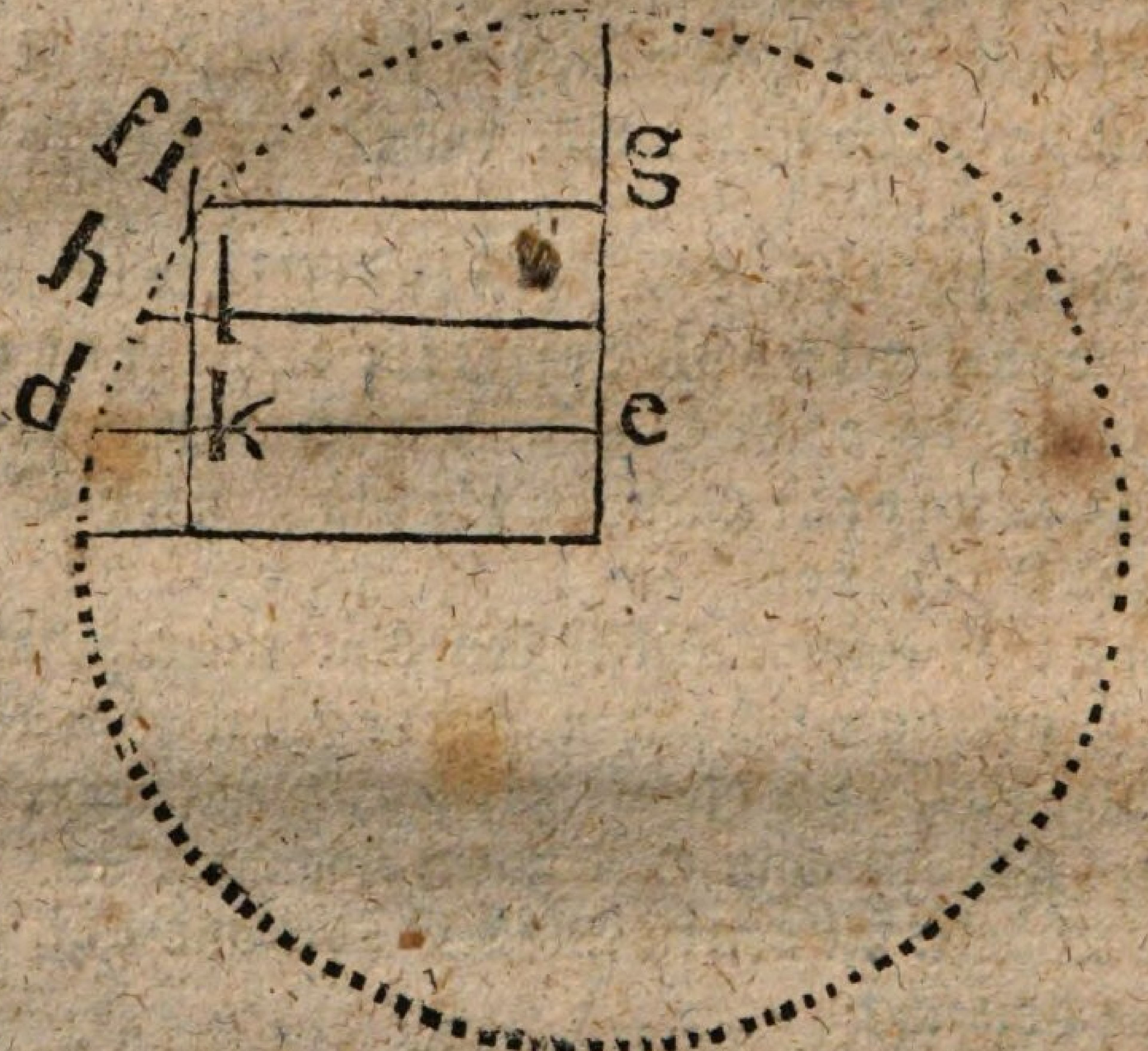
Aehnliche Dreiecke.

Wie können wir nun schließen?

Auf eben diese Art hat man nun aus der Seite des Fünfeckes, den Sin. eines Bogens von 36° zuerst finden können.

So konnte man also die Sinusse von einer Minute an, bis zu 90° hinauf berechnen. Es würde aber diese

Arbeit ungeheuer schwer und weitläufig gewesen seyn, wenn man nach dieser Methode hätte verfahren wollen. Dies war aber auch nicht nöthig man könnte durch Hülfe der Regel de tri es leichter haben, z. B. man könnte den Sin. eines Bogens finden, welcher der Unterschied zweier Bögen ist, die von einander nicht 45° betragen.



Wenn wir aus dem Endpunkte des kleinen Sin., der in der Peripherie liegt, eine senkrechte Linie ik auf de ziehen; welche vierseitige Figur erhalten wir dadurch?

Das Parallelogramm fgek.

Ferner, da der Bogen fd nicht 45° betragen soll, so können wir das Dreieck fdk als ein geradlinigtes ansehen, und hl als eine mit der Grundlinie dk parallel gezogene Linie.

Wie können wir nun schließen?

fd : dk = fh : hl.

Nach der Regel de tri,

$$\frac{dk \times fh}{fd} = hl.$$

und das heißt:

Wir finden die Größe hl oder den Unterschied des gesuchten und des kleinern Sin., wenn wir den Unterschied der beiden gegebenen Sin. mit der Differenz der Bögen des kleinern und gesuchten Sin. multipliciren, und durch den, noch nicht volle 45° betragenden Unterschied der beiden gegebenen Bögen dividiren.

Addiren wir hierzu nun den kleinern Sin., so haben wir den, welchen wir finden wollten.

Auf diesem Wege und vermittelst noch anderer Methoden war man also im Stande, alle Sin. der Bögen und Winkel von 0° an bis zu 90° hinauf zu berechnen. Allein dies war noch so weitläufig. Man suchte daher Erleichterungsmittel und fand eines der vorzüglichsten in den sogenannten Logarithmen. s. unten von den Logarithmen.

§. 18.

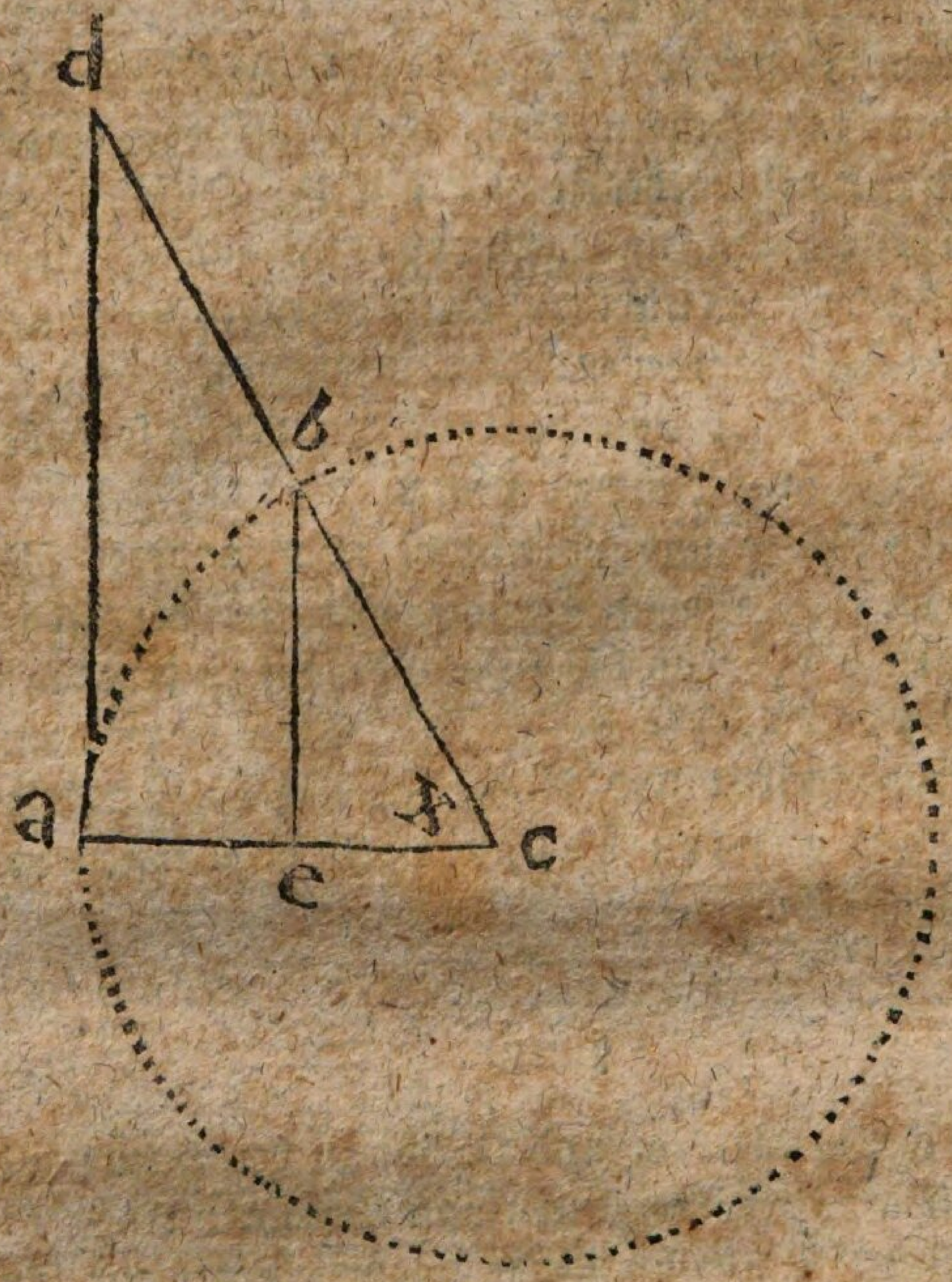
Also wir wissen die Sin. und Cosin. zu berechnen; wie finden wir aber die Tangenten und Secanten? —

Nehme die nächstfolgende Figur einmal zur Betrachtung.

Welche Linie ist der Sin. — der Cos.?

Kannst du denn aus diesen bekannten Linien, nicht die unbekannte Tangente durch einen Schluß, durch eine Proportion, herausfolgern?

Wenn diese Winke dir noch nicht genug sind, um die Tangente zu finden, so will ich dir durch folgende Fragen mehr behülflich seyn, nur ꝛc. ꝛc.



Wie verhalten sich die beiden Dreiecke dca und bce gegen einander? —

(Suche nur erst das auf, worin sie mit einander übereinstimmen, und du wirst mir leicht die eben vorgelegte Frage beantworten.)

Sie haben 2, und also auch 3 gleiche Winkel.

Gut! wir behaupten daher von diesen Dreiecken?

Daß sie sich ähnlich sind.

Wie sind wir nun befugt zu schließen?

ec : be = ac : da.

d. h.:

Cos. x : Sin. x = Sin. tot. : Tang. x.

Von dieser geometrischen Proportion ist nun das 1ste, 2te und 3te Glied bekannt, und wir sollen daraus das 4te (nemlich die Tang. x) berechnen; wie finden wir das?

Wir multipliciren das 2te und 3te Glied mit einander, und dividiren das Produkt durch das erste Glied.

Und das heißt hier:

Wir multiplicıren den Sin. x mit dem Sin. tot., und dividiren das Produkt durch den Cosin. x; so erhalten wir die Tang. x.

Ferner verhält sich nach unsrer Figur:

be : bc = da ; dc

d. h.:

Sin. x : Sin. tot. = Tang. x : Sec. x.

Wie finden wir auch aus dieser geometrischen Proportion das 4te uns unbekannte Glied, nemlich hier die Sec. x?

Wir multipliciren ꝛc.

Also überhaupt: wie findet man die Secante?

Man findet die Secante: wenn man die Tangente mit dem Radio multiplicirt, und dieses Produkt durch den Sin. dividirt.

Nach allen diesen vorhergegangenen mühsamen Berechnungen fand sich noch eine neue Schwierigkeit. Man mußte nemlich, um das Verhältniß der trigonometrischen Linien zum Radio auszudrucken, große Zahlen wählen, weil sonst jeden Augenblick Brüche

entstehen würden. Diese hatten aber in der Berechnung viele Beschwerden. Daher nahm man zu neuen Erfindungen seine Zuflucht. Hierin haben sich vorzüglich ausgezeichnet: Johann Nepper, ein Schottländischer Baron, und Heinrich Brigge, ein Engländer. Diese erfanden nemlich Zahlen, die eben dasselbe Verhältniß arithmetisch ausdrucken, und so ward das Dividiren in Subtrahiren, und das Multipliciren in Addiren verwandelt. s. den Abschnitt von den Logarithmen.

Diese Verhältnißzahlen (Logarithmen) werden auch künstliche trigonometrische Linien genannt. Sie sind in den Tabellen den natürlichen trigonometrischen Linien zur Seite gesetzt.

Von den Tabellen.

---

§. 19.

Ihre besondere Einrichtung, ihre besten Ausgaben, und ihr Gebrauch.

A. Einrichtung der Tabellen.

Der Bequemlichkeit wegen hat man in den Tabellen die Einrichtung getroffen, daß

a) die Sinusse der Bögen, welche weniger als 45° betragen auf die eine, und die, welche mehr als 45° betragen, auf die andere Seite gesetzt sind, und zwar so, daß die zu 90° ergänzenden allemal zu-

sammen stehen, damit man, wenn man den Sin., die Tang. und Sec. eines Winkels hat, man auch zugleich den Cos., die Cotang. und Cosec. desselben an der Gegenseite bemerken kann.

b) hat man die trigonometrischen Linien bloß in einem Quadranten berechnet, und diese in den Tabellen verzeichnet; doch werden die trigonometrischen Linien oft negativ (verneinend) ausgedruckt, und in einem andern halben Kreise betrachtet.

Wenn aber z. B. in den Tabellen der Sinus von 100° gesucht werden sollte; wie wäre der zu finden? — Was ist der Winkel von 100° für ein Winkel, weil er mehr als 90° beträgt?

Ein stumpfer Winkel.

Und was haben wir gelernt: welche Winkel haben mit den stumpfen einerlei Sin., Tangenten und Secanten?

Die spitzigen Winkel, welche mit ihnen zusammen 180° ausmachen.

Wie wäre also der Sin. eines Winkels von 100° in den Tabellen zu erhalten?

Man hat nur diesen Winkel von 180° zu subtrahiren, und von dem Reste, den Sinus in den Tabellen zu suchen.

Wie erhält man also nun auch die Tangenten und Secanten der stumpfen Winkel?

c) In den kleinen Tabellen hat man die 3 letzten Ziffern der natürlichen Linien weggelassen, d. h., man hat sie nicht für 10,000,000 Theile berechnet; sondern wirklich für 10,000,000,000, und dann die 3 letzten Ziffern weggelassen, aber die Logarithmen sind deswegen doch beibehalten worden. Darum sind alle Kennziffern oder Logarithmen,

die zu den Sin. und Tangenten gehören, um 3 Einheiten zu groß, weil sie eigentlich die Logarithmen von solchen Zahlen sind, die mehr Ziffern enthalten.

d) Ist der Logarithmus allemal die erste Ziffer zur Linken, durch einen Punkt abgesondert von den übrigen. Diese abgesonderte Ziffer wird die Charakteristik oder Kennziffer genannt. Sie bedeutet eine ganze Zahl, und die übrigen Ziffern, welche nach dem Punkte folgen, sind Decimalbrüche.

Nach diesen Kennziffern werden nun die Logarithmen aufgeschlagen. Man sucht hiernach nemlich die Kennziffer zuerst, darauf folgt die zweite, dann die 3te Ziffer u. s. w.

B. Von den besten Ausgaben.

Unter den kleinen Ausgaben sind die Vlacquischen, von Adrian Vlacq, und zwar die Ausgabe, welche 1657 und 1665 im Haag herausgekommen sind, die correktesten. Auch hat Wolf dergleichen drucken lassen, die aber noch mehr fehlerhaft sind.

Unter den größern sind die besten, welche Gardiner in London 1742 in Quart herausgegeben hat.

Schon vor einigen Jahren haben wir in Deutschland eine vortreffliche Sammlung der Art, die ein Mitglied der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin unter folgendem Titel herausgegeben hat:

„Neue erweiterte Sammlung logarithmischer, „trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der

„Mathematik unentbehrlichen Tabellen, von Johann Carl Schulze.

Eine neuere Sammlung ist aber von Vega. Seine Tabellen sind mit so vieler Mühe ausgearbeitet, und so sorgfältig gedruckt, daß der Verfasser auf jeden Fehler eine Prämie von einem Ducaten gesetzt hat. Und überdem enthält diese Sammlung noch einige sehr brauchbare Tabellen, z. B. die componirten Zahlen, und hauptsächlich diejenigen componirten Zahlen, welche in 7 und 11 theilbar sind; ferner enthalten sie alle Quadratzahlen von 1 bis 1000; ferner die Würfel von 1 bis 100; und endlich die Potenzen der natürlichen Zahlen von 1 bis zur 6ten, oft zur 7ten Potenz.

C. Vom Gebrauch der Tabellen.

Nach der Einrichtung dieser Tabelleu lassen sich die Auflösungen trigonometrischer Aufgaben auf eine doppelte Art machen, nemlich:

a) durch die trigonometrischen Linien selbst, und
b) durch die Logarithmen.

Es ist uns bekannt, daß sich immer verhält der

$$\text{Cos. } x : \text{Sin. } x = R : \text{Tang. } x$$

$$\text{Tang. } x = \frac{\text{Sin. } x \times R}{\text{Cos. } x.}$$

Anstatt, daß wir nun diese Zahlen vermehren, dürfen wir nur die Logarithmen der Faktoren addiren, und davon den Logarithmus des Divisors subtrahiren: so finden wir den Logarithmus der gesuchten trigonometrischen Linien. Hier also die Tangente, indem wir die Logarithmen des Sin. und Radius addiren, und davon den Logarithmus des Cos. subtrahiren.

Es sei also z. B. der Winkel $x = 30^\circ$, und da der Radius = 10,000,000, so ist der Sin. des Winkels von 30° = 5000,000; diese mit einander multiplicirt, und durch den Cos. von 30° = 8660254 dividirt: hat man nur nöthig, ihre Logarithmen zu nehmen:

also 10,000000 + 9.6989700
— 9.375306 = 9.7614394,

der Logarithmus der Tangente.

Anmerk. Dies Beispiel dient zugleich auch als ein Beweis, daß die Berechnungen der Logarithmen für die Tangenten sehr leicht sind, nachdem man erst die Logarithmen für ihre Sin. gefunden hat.

Eben dieses gilt auch von den Logarithmen der Sec. Es verhält sich:

Cos. : R = R : Sec. x.

Wie finden wir nun aus dieser Proportion das 4te unbekannte Glied, nemlich die Sec. x?

Wir multipliciren das 2te und 3te Glied, hier den Radius, mit sich selbst, und dividiren das Produkt durch den Cos. x.

Da nun in der Berechnung mit Logarithmen, wie wir lernten, das Multipliciren sich in Addiren verwandelt, welche Größen müssen wir also addiren?

Wir müssen hier den Radius zu sich selbst addiren, oder welches einerlei ist, ihn doppelt nehmen.

Und da durch Hülfe der Logarithmen das Dividiren sich in Subtrahiren verwandelt; welche Größen müssen wir denn subtrahiren?

Wir müssen hier den Logarithmus des Cos. davon abziehen.

Was bleibt denn als Rest?

So bleibt der Logarithmus der Sec. als Rest, nemlich:

$$10{,}0000000 + 10{,}0000000$$
$$- 9{\cdot}9375306 = 10{,}0624694.$$

Wiederhole: wie findet man also allgemein ausgedruckt, durch Hülfe der Logarithmen den Logarithmus der Sec.?

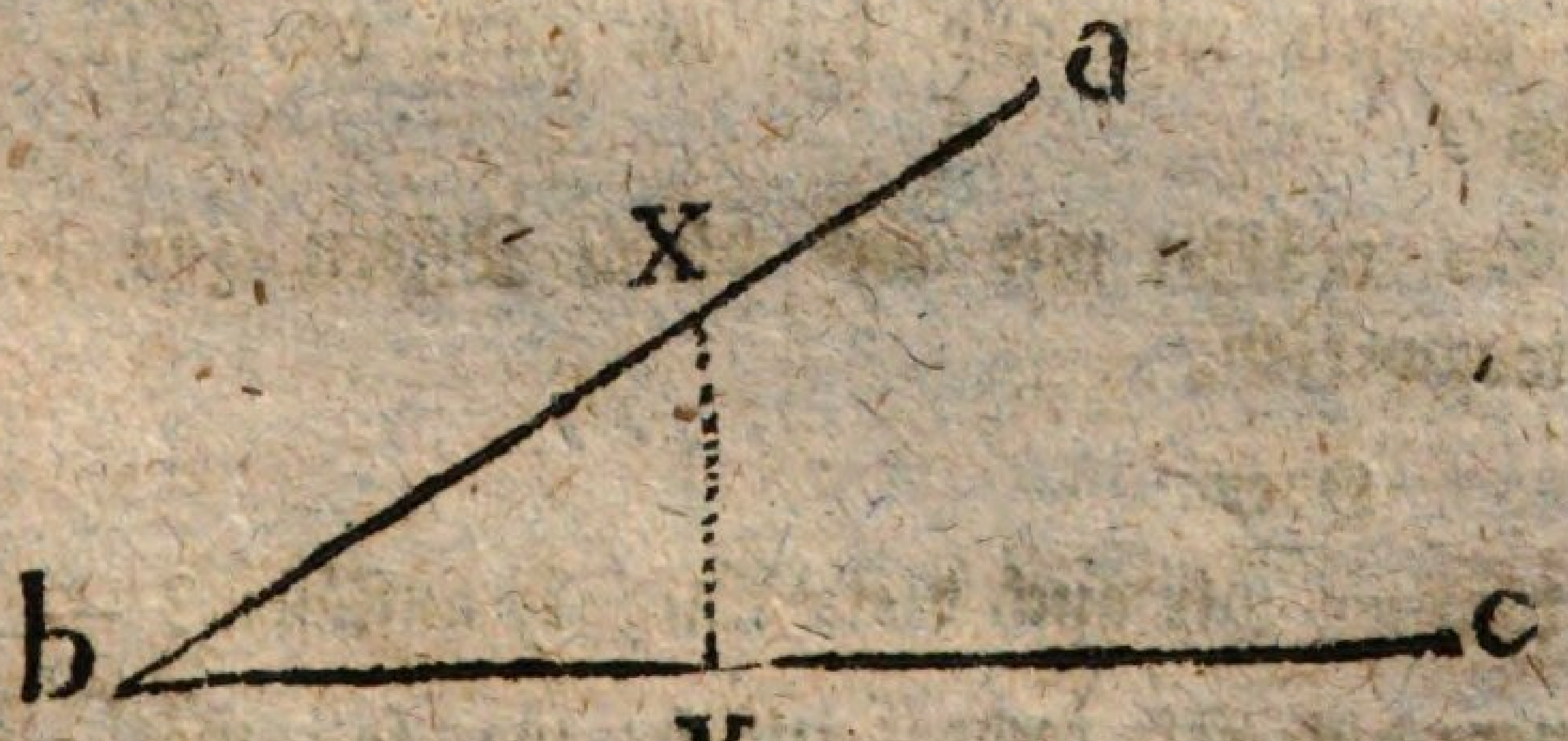
Wenn man den Logarithmus des Rad. doppelt nimmt, und hiervon den Logarithmus des Cos. abzieht: so bleibt der Logarithmus der Sec.

Anmerk. Die Logarithmen der Secante hat man in den Tabellen nicht angeführt, weil man sie leicht durch Rechnung finden kann.

Wir wollen jetzt erst den Gebrauch der natürlichen trigonometrischen Linien in einigen Aufgaben zeigen.

A. Ein in Linien gegebener Winkel vermittelst der trigonometrischen Linien genauer, als mit dem Transporteur, zu finden.

Es sei uns z. B. folgender Winkel abc in Linien gegeben, dessen Größe wir bestimmen sollen —



Auflösung. Man trägt, nach dem verjüngten Maaßstabe, auf den einen Schenkel: tausend gleiche Theile ab; dies giebt den Punkt x. Aus diesem Punkte lasse man eine senkrechte Linie auf den andern Schenkel herabfallen; dies giebt die Linie xy. Diese Linie messe man nun, nach dem verjüngten Maaßstabe; so hat man den Sin. des Winkels, den man in den Tabellen aufsucht.

Denn wenn wir uns mit bx einen Kreis beschrieben gedenken; was ist bx denn für eine Linie in Absicht des Kreises?

bx ist der Radius.

Was für eine trigonometrische Linie ist xy denn?

xy ist der Sinus.

Und by —?

by ist der Cos. dieses Winkels.

Da bx=1000; von welcher Linie muß denn auch noch 1000 Theile abgerechnet werden?

Von ac.

Nun ist aber der Radius in den kleinen Tabellen in 10000000 Theile getheilt; folglich 4 Ziffern oder eigentlich 4 Stellen zur rechten mehr; wie viele Ziffern müssen wir also bei der Zahl des Sin. wegwerfen?

So müssen wir auch die 4 Ziffern zur rechten wegwerfen.

Oder:

Wie könnten wir auch diese Aufgabe auflösen? —

Erinnere dich erst recht deutlich: was soll wol gesucht werden, um die Größe des Winkels zu bestimmen?

Und was behaupten wir von dem Cos. und dem Sin. des Complementswinkels?

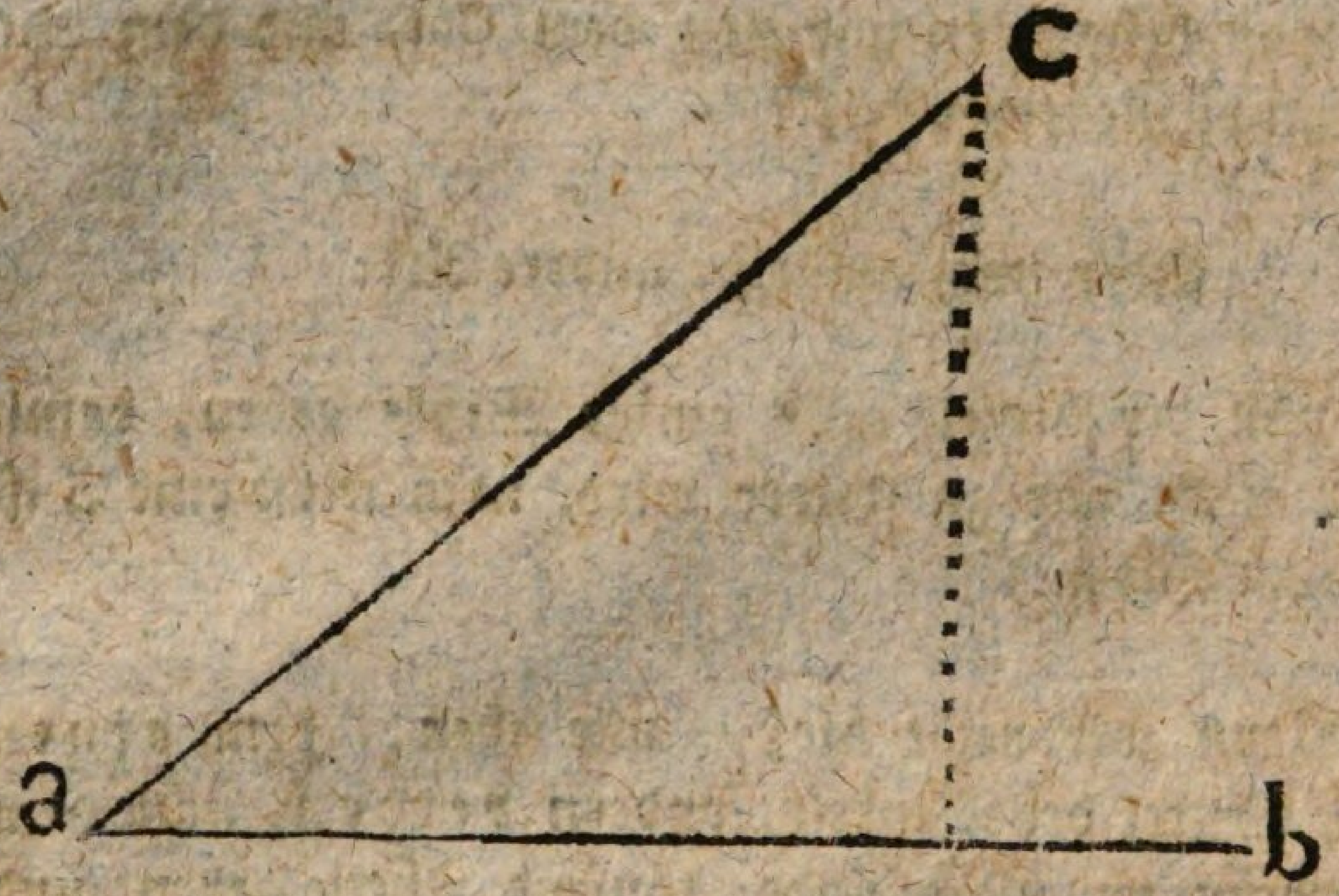
Oder noch auf eine andere Art:

(Ich will dir hierzu auch einige Winke geben, damit es dir nicht gar zu schwer wird, noch selbst eine Auflösung zu finden.)

Wenn wir nicht bloß, wie eben, dem einen Schenkel des Winkels, sondern beiden, nach dem verjüngten Maaßstabe, tausend Theile geben, und dann die Theilpunkte mit einander verbinden.

B. Einen gegebenen Winkel auf das Papier genauer aufzutragen, als mit dem Transporteur.

Auflös. Man ziehe auf dem Papier eine beliebige gerade Linie z. B. ab, und suche den Cosinus unsers Winkels. Diesen Cosinus setzt man von dem Punkte, welcher der Scheitelpunkt seyn soll, z. B. a, auf die gezogene Linie ab, nach dem man ihn, nach dem verjüngten Maaßstabe, gemessen hat. In diesem Theilungspunkte — hier in b — errichtet man eine senkrechte Linie; sucht darauf in den Tabellen den Sin dieses Winkels, und schneidet ihn, nach dem verjüngten Maaßstabe, in der senkrechten Linie ab, und verbindet endlich diesen Durchschnittspunkt mit dem Scheitelpunkte. z. B.:

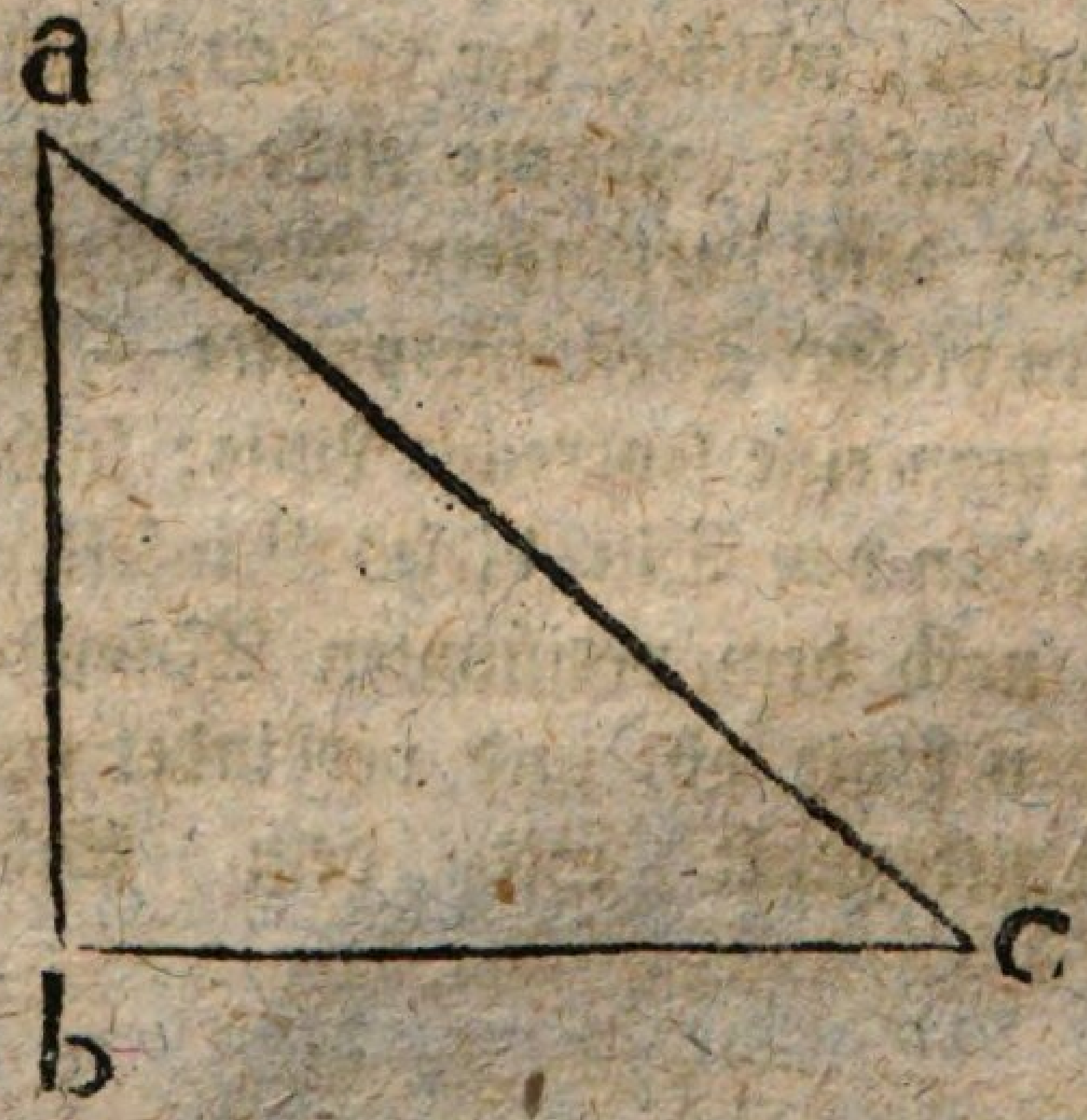


Oder:

Kannst du noch eine andere Auflösung selbst finden? — (Ich will dich auf die Spur bringen.)

Mache den einen Schenkel des Winkels, den du abtragen sollst, gleich tausend Theile, beschreibe dann mit dieser Linie einen Kreisbogen, und suche den Sin. rc. rc.

§. 20.



Zu welcher Klasse von Dreiecken gehört das hier vor-

stehende, weil die senkrechte Linie ab mit der wagerechten bc in b zusammen trifft?
Welche Seite des Dreieckes ist die längste?
Wie verhält sie sich denn zu der andern Seite z. B. zu ab?

Das weiß ich nicht.

Kannst du jetzt nicht irgend ein Verhältniß — etwa ein trigonometrisches — auffinden? —

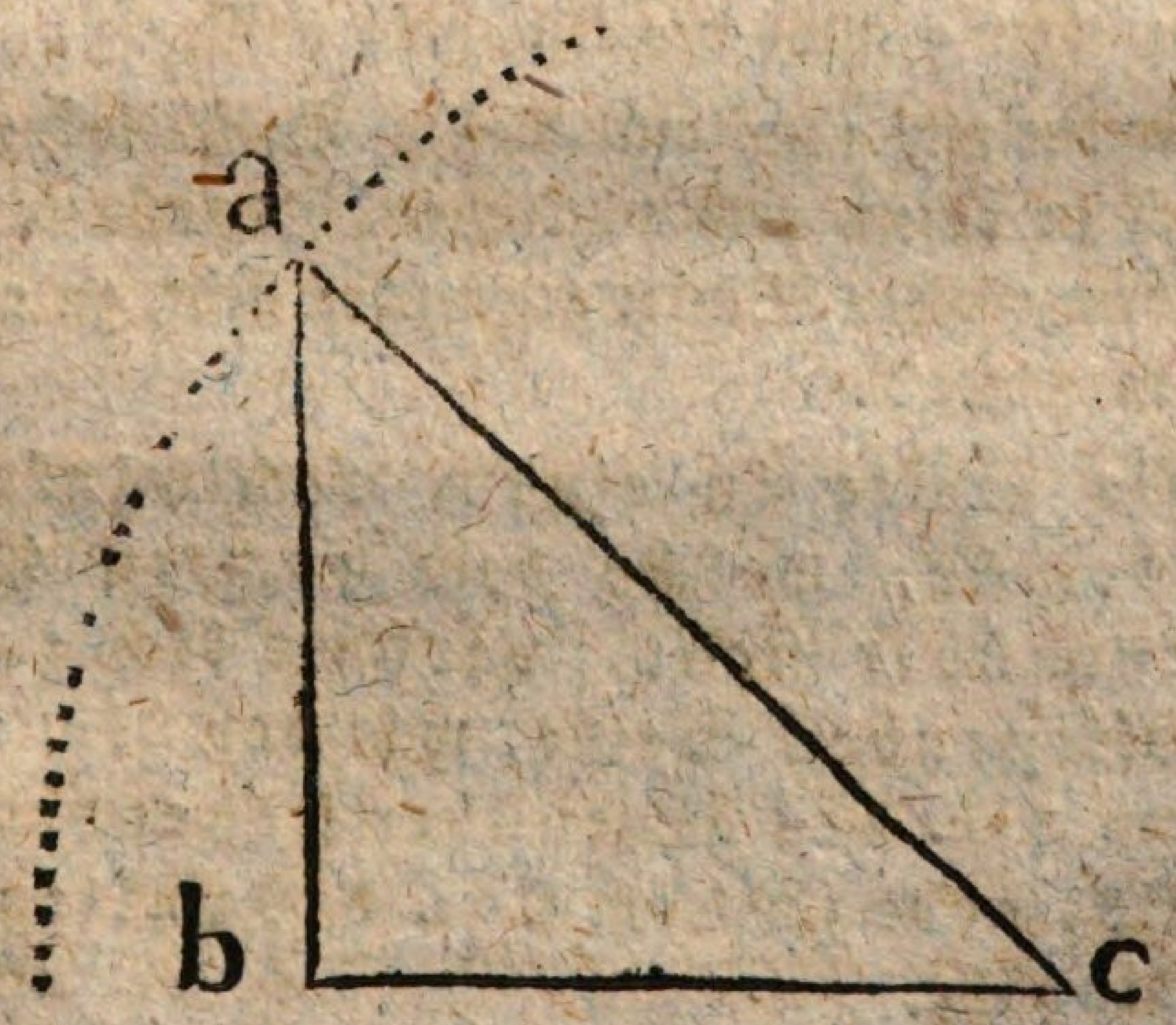
(Er schweigt.)

Welche Verhältnisse sind uns überhaupt in den trigonometrischen Tabellen gegeben?

Die Verhältnisse vom Sin. tot. zum Sin., auch zur Tangente ꝛc. ꝛc.

Haben wir hier denn keinen Sin. tot., Sin., Cos. ꝛc.? Weißt du denn keinen zu erhalten?

Ja, wenn ich mit der längsten Seite, die dem rechten Winkel gegenüber liegt, einen Kreis beschreibe: so wird ac der Sin. tot. z. B.:



Welche trigonometrische Linie ist ab denn?

ab ist der Sin. des Winkels c.

Und bc — —?

bc ist der Cos. des Winkels c.

Welche Verhältnisse sind uns nun in den trigonometrischen Tabellen gegeben?

Die Verhältnisse etc.

Und nun wirst du mir wol ein Verhältniß angeben können, wie sich die längste Seite ac zu ab verhält?

ac : ab = Sin. tot. : Sin. c.

Da der Sin. des Winkels c, der Cos. des Winkels a ist; wie kann die Proportion denn auch heißen?

ac : ab = Sin. tot. : Cos. a.

Der Cos. vom Winkel a ist ab; wie heißt aber der Sin. davon?

Der Sin. des Winkels a ist bc.

Wie können wir also nun auch schließen?

ac : bc = Sin. tot. : Sin. a;

oder:

ac : bc = Sin. tot. : Cos. c, weil bc als der Cos. von c auch der Sin. von a ist.

Was lernen wir nun aus diesem Beispiele? wie verhält sich in einem rechtwinklichten Dreiecke die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, zu einer anliegenden Seite?

Die Seite in einem rechtwinklichten Dreiecke, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, verhält sich zu einer anliegenden Seite, wie der Sin. tot. zu dem Sin. des gegenüber stehenden Winkels, oder zu dem Cos. des anliegenden Winkels.

Wir wollen nun, nach unserer letztgezeichneten Figur, weiter schließen.

Was für eine trigonometrische Linie ist bc in Absicht auf den ∠ c?

bc ist der Cos. des Winkels c.

Und was für eine trigonometrische Linie ist ab in Absicht auf denselben ∠ c?

ab ist der Sin. des Winkels c.

Wie können wir nun schließen:

Es verhält sich:

bc : ab = Cos. c : Sin. c.

Wie nennen wir die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreieckes, welche den rechten Winkel einschließen?

Die heißen Catheten.

Und wie verhalten sich nun die Catheten zu einander?

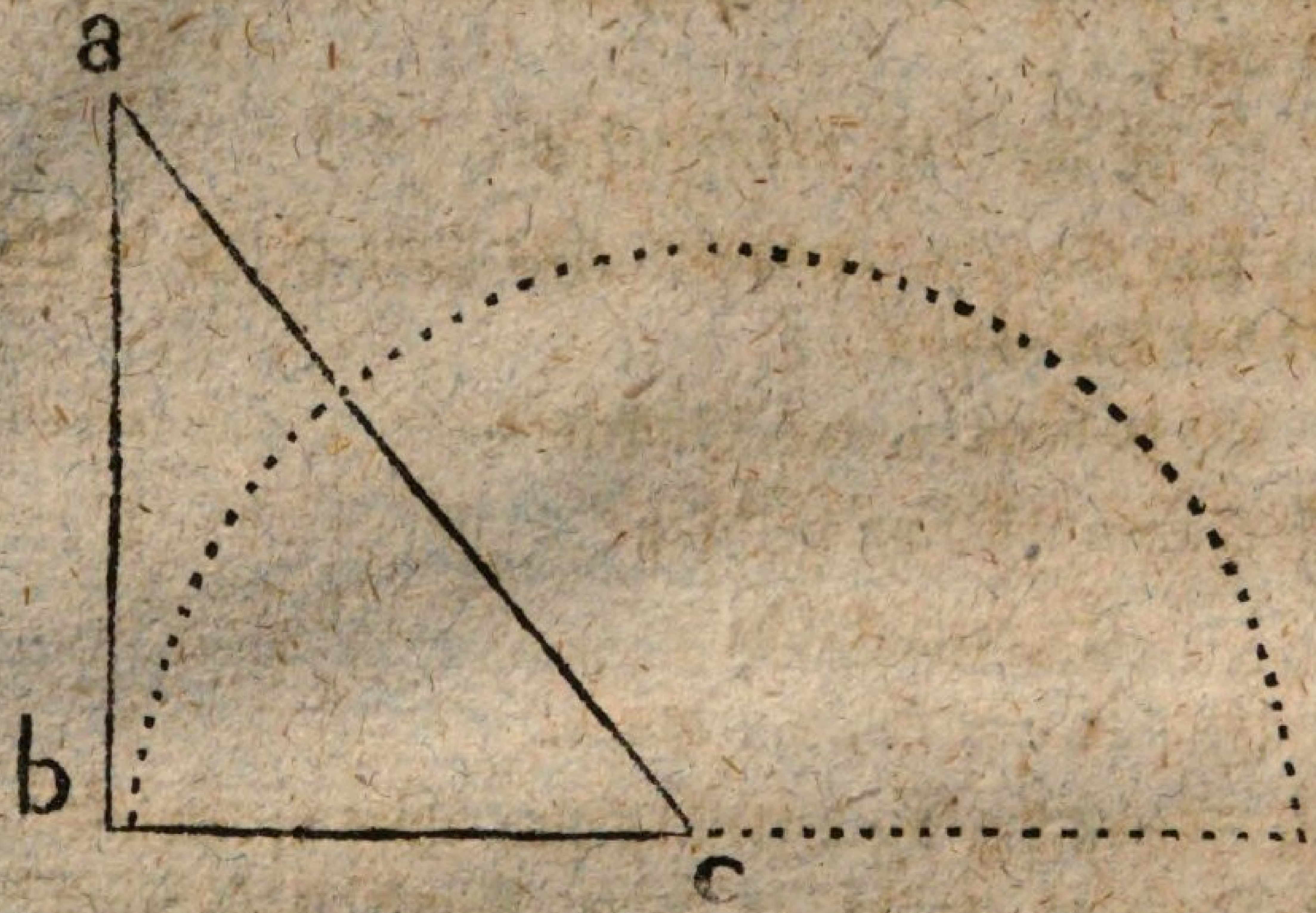
Die eine Cathete verhält sich zu der andern, wie der Cos. des spitzigen Winkels, welcher an der ersten Cathete liegt, zu dem Sin. desselben Winkels.

§. 21.

Vorher machten wir mit der Hypothenuse ac aus c einen Kreis, und fanden so eine uns unbekannte Proportion.

Mit welcher Seite des rechtwinklichten Dreieckes könnten wir z. B. auch einen Kreis beschreiben, um zu sehen, wohin uns dies führt?

Wir könnten z. B. mit der einen Cathete bc aus c einen Kreis beschreiben.



Was ist ab nun für eine trigonometrische Linie?

ab ist die Tang. vom ∠c.

Und bc — —?

bc ist der Sin. tot.

Welche Proportion folgt nun hieraus?

Sin. tot. : Tang. c = bc : ab.

Wie verhält sich also allgemein ausgedruckt der Sin. tot. zu der Tangente eines spitzigen Winkels in einem rechtwinklichten Dreiecke?

Der Sin. tot. in einem rechtwinklichten Dreiecke verhält sich zu der Tangente eines spitzigen Winkels, wie die Cathete, welche an diesem Winkel liegt, zu der gegenüberstehenden.

ab war — s. Fig. — die Tangente von dem ∠c. Was für eine trigonometrische Linie ist aber ab in Absicht auf den ∠a — den Complementswinkel von c —?

ab ist die Cotangente vom ∠a.

Wie können wir also unsere letzte Proportion verändern?

Sin. tot. : Cot. a = bc : ab.

Und das heißt allgemein: der Sin. tot. verhält sich auch in einem rechtwinklichten Dreiecke zu der Cot. eines spitzigen Winkels wie die, diesem Winkel gegenüberstehende Cathete, zu der anliegenden.

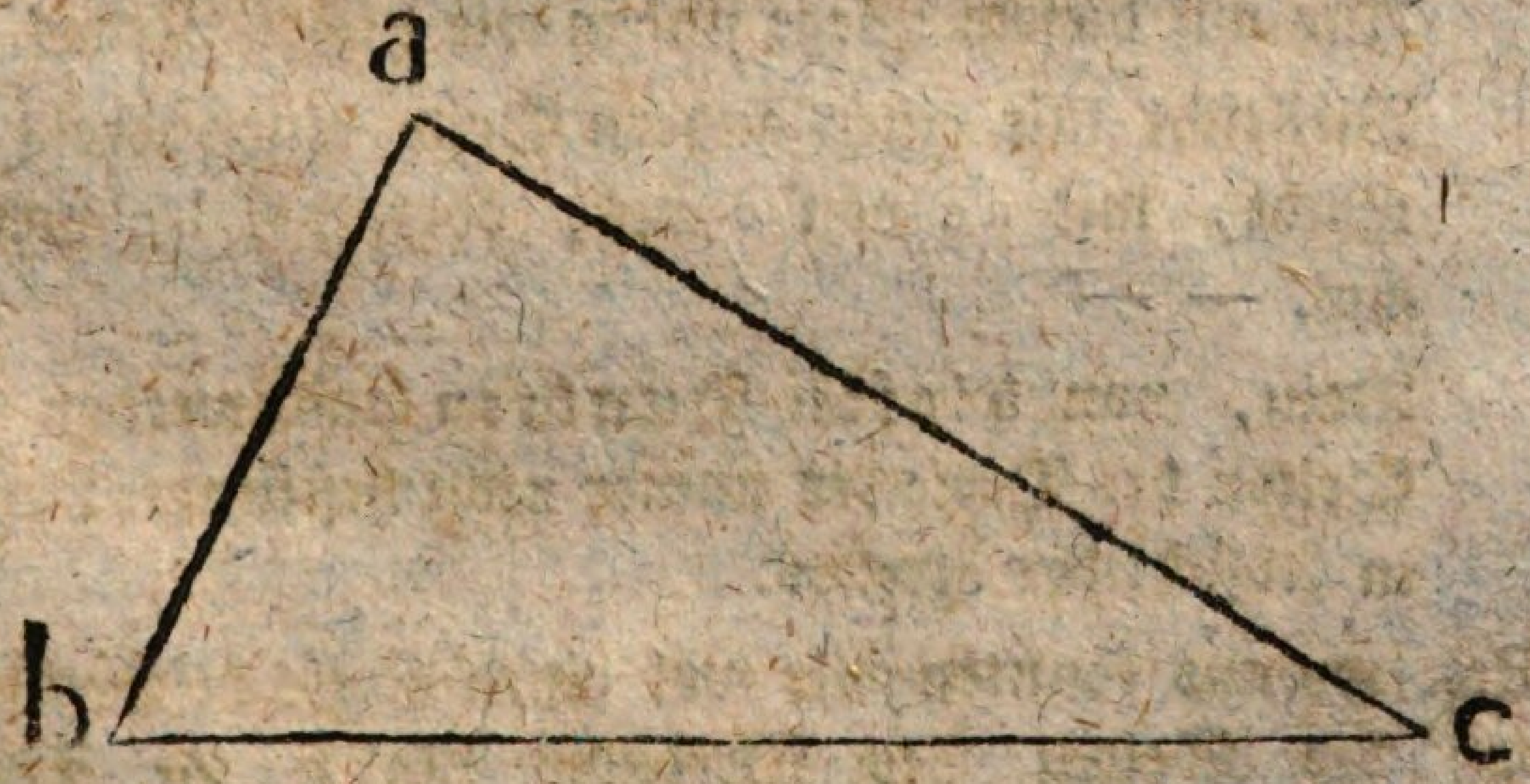
§. 22.

Wiederhole noch einmal den im vorigen §. allgemein ausgedruckten Satz.

Der Sin. tot. verhält sich in einem rechtwinklichten Dreiecke rc. rc.

Also in einem rechtwinklichten Dreiecke; wenn aber das Dreieck nun schiefwinklicht wäre, wie verhalten sich denn die Seiten gegen einander?

z. B.:

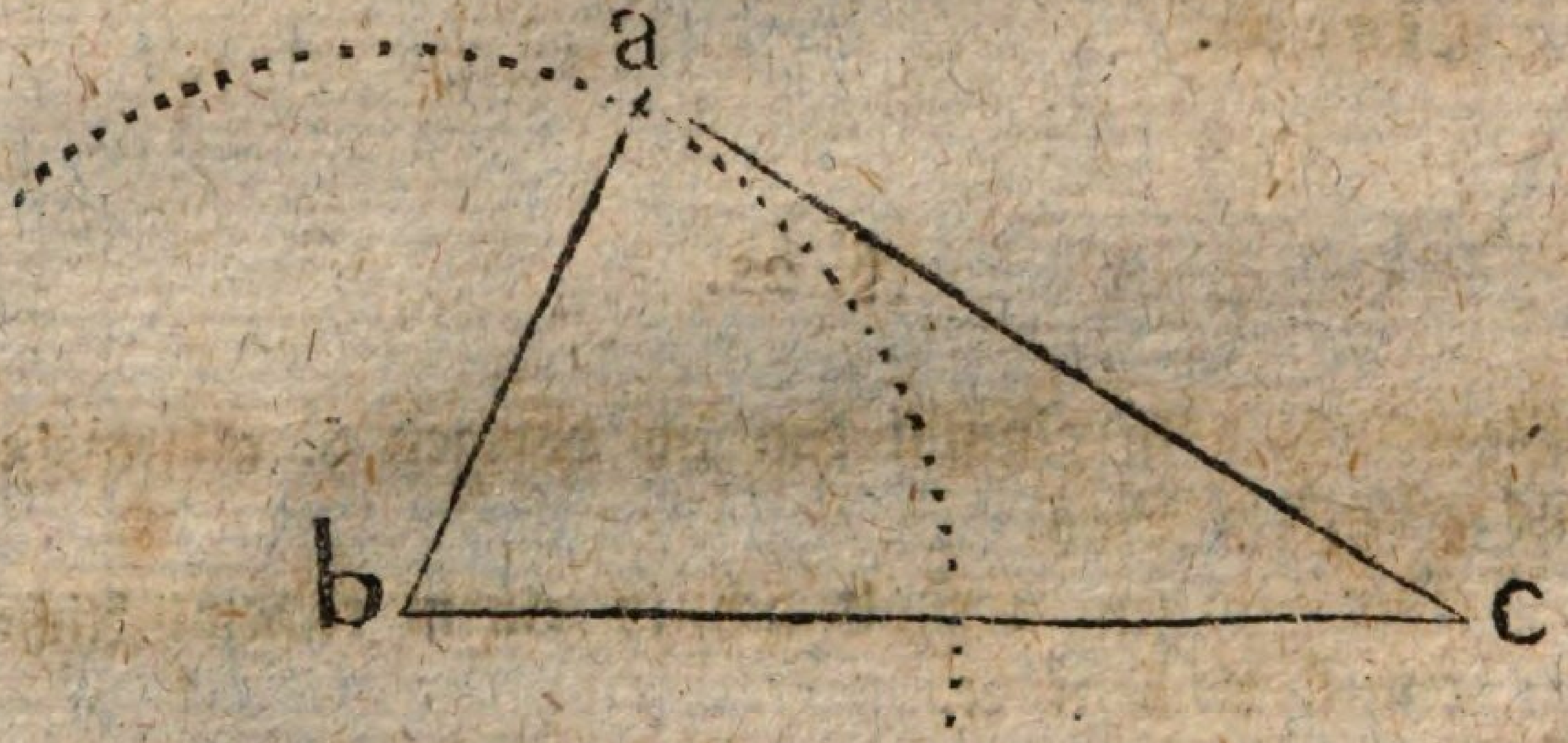


Wie verhält sich hier ab zu bc? —
(Wie werden wir nun wol Verhältnisse finden?)

Wie kamen wir im vorigen Lehrsatze auf neue unbekannte Verhältnisse?

Wir machten mit der einen Seite des Dreieckes einen Kreis, und ꝛc. ꝛc.

Wenn wir nun dies auch einmal bei diesem schiefwinklichten Dreiecke versuchten, um zu sehen, wohin uns dies führe, z. B. erst mit ab:



ab ist jetzt der Halbmesser, die beiden andern Seiten sind keine bestimmte Linien in Absicht des Kreises noch im Vergleich mit dem Halbmesser.

Also auf diesem Wege finden wir nichts Neues.

Vielleicht mit einer andern Seite einen Kreis gemacht, mit ac von c aus, oder mit bc von b aus. — —

Nein, von diesen Punkten aus werden die Seiten des Dreieckes immer nicht bestimmte Linien in Absicht des Kreises.

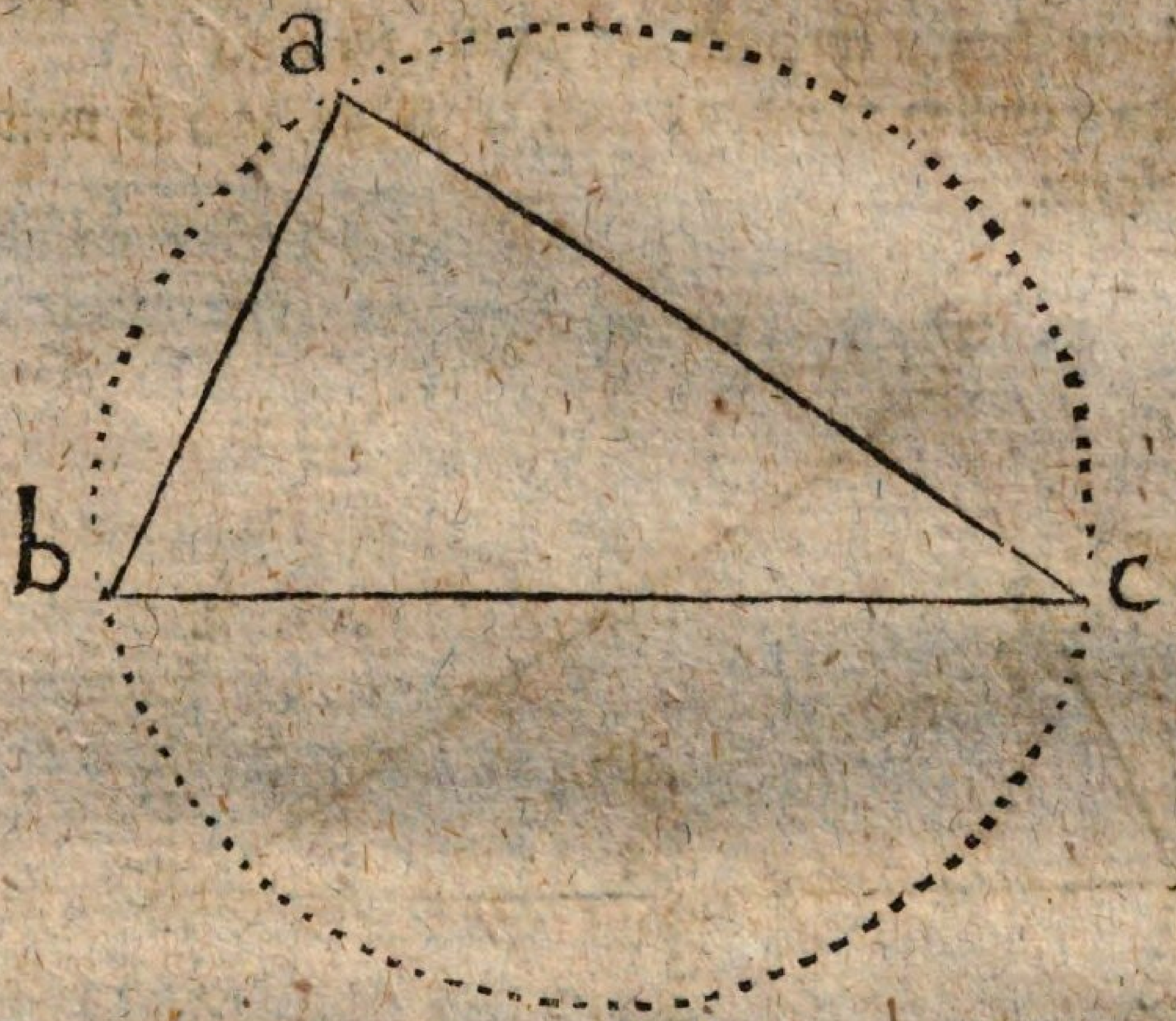
Von wo aus könnten wir wol einen Kreis beschreiben, daß die Seiten des Dreieckes Linien im Kreise würden?

Ich weiß nicht, ob vielleicht, ohngefehr von der

Mitte des Dreieckes aus, einen Kreis so beschrieben, daß die Seiten, Linien im Kreise würden, uns auf etwas Bestimmtes führte.

Mache einmal den Versuch.

z. B.:



Was sind die Seiten ab, bc und ac für Linien in Absicht des Kreises?

Es sind Sehnen des Kreises.

Und die Winkel a, b und c, weil sie in der Peripherie liegen?

Sind Peripheriewinkel.

Welches Bogenstück ist denn das Maaß von dem Peripheriewinkel a?

Die Hälfte des Bogens bc, worauf der Winkel a mit seinen beiden Schenkeln steht.

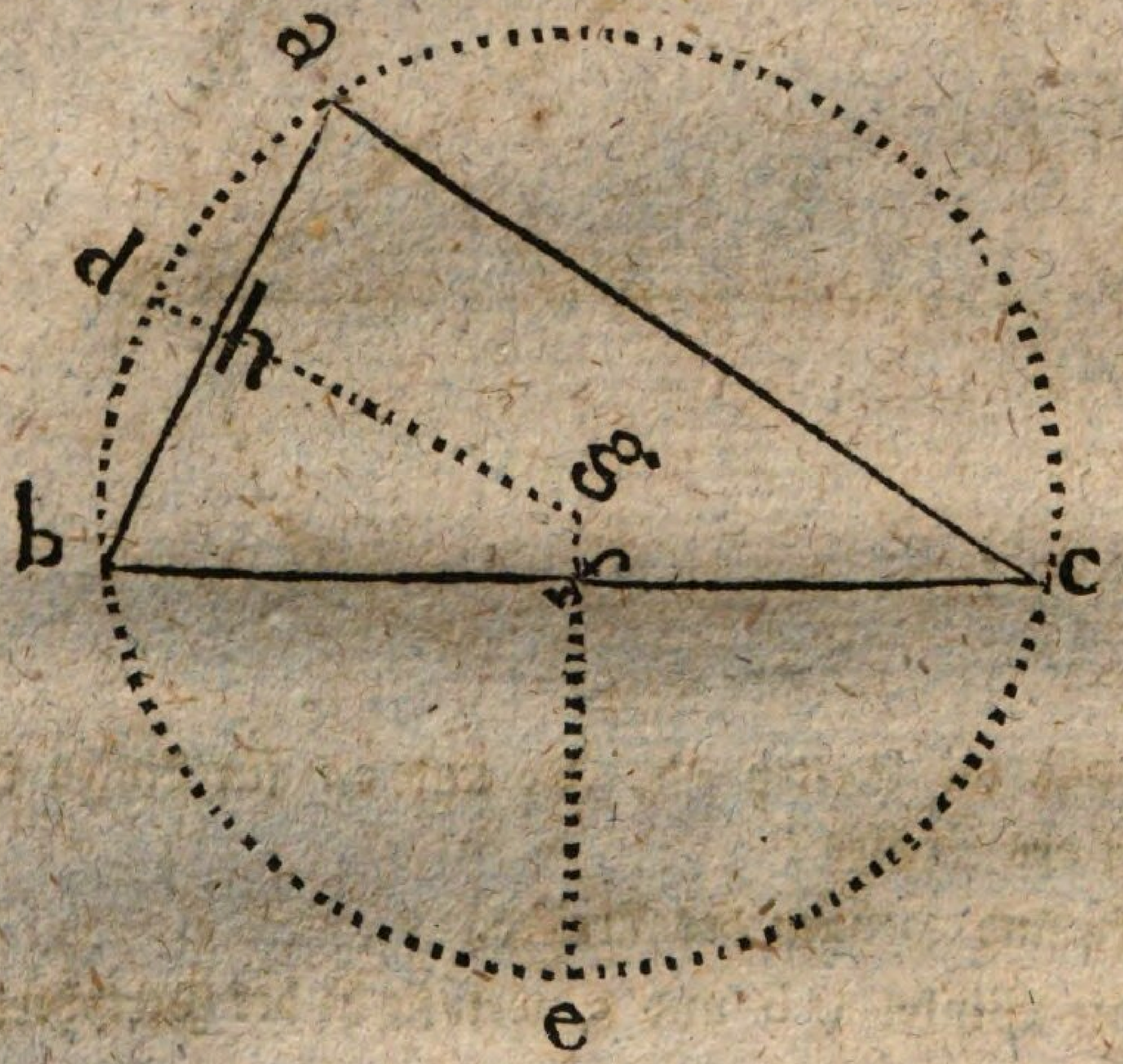
Und das Maaß von dem Winkel c wäre?

Auch die Hälfte des Bogenstückes, worauf der Winkel c mit seinen beiden Schenkeln stehet.

Wie erhalten wir denn die Bogenstücke halbirt?

In der Geometrie haben wir gehabt, daß eine senkrechte Linie vom Mittelpunkte des Kreises auf die Sehne gefällt, die Sehne und den dazu gehörigen Bogen in 2 gleiche Theile zerlegt.

Dies wollen wir denn nun erst thun, und so weiter folgern.



Wenn wir nun den Sinus des Winkels c mit dem Sinus des Bogens a d vergleichen; was können wir denn behaupten?

Daß sie sich gleich sind.

Und wenn wir den Sinus des Winkels a mit dem Sinus des Bogens b e vergleichen — — — —?

So können wir behaupten, daß sie auch gleich sind.

Wie verhalten sich nun aber die ganzen Linien ab : bc zu einander?

Die ganzen verhalten sich wie ihre Hälften.
d. h.:
ab : bc = ah : bf.

Da nun ah = Sin. ad, und bf = Sin. be

Also ab : bc = Sin. ad : Sin. be
Sin. ad = Sin. c, und Sin. be = Sin. a

folglich ab : bc = Sin. c : Sin. a.

Ferner: wie verhält sich die Seite ab zu der Seite ac?

ab : ac = Sin. c : Sin. b.

Versuch nun den Beweis hiervon ohne meine Hülfe zu finden. Es wird dir jetzt leicht werden, weil er sich auf die eben angeführte Art führen läßt.

Und wie verhält sich auch bc zu ac?

bc : ac = Sin. a : Sin. b.

(Führe den Beweis auch so wie eben.)

Zu welcher Klasse von Dreiecken, s. Fig., gehört denn dies?

Zu den schiefwinklichten Dreiecken.

Gelten denn unsere Sätze, die wir durch Herleitung darnach gefolgert haben, bloß von den schiefwinklichten Dreiecken?

Nein, auch von den rechtwinklichten.

Wende sie einmal auf das rechtwinklichte Dreieck an. Wie heißt also unser Lehrsatz ganz allgemein ausgedruckt?

Die Seiten in einem jeden geradlinigten Dreiecke verhalten sich wie die Sin. der gegenüberstehenden Winkel.

§. 23.

Nehmen wir die letzte, im eben vorhergehenden §. hergeleitete geometrische Proportion noch einmal vor uns, sie war:

ab : bc = Sin. c : Sin. a.

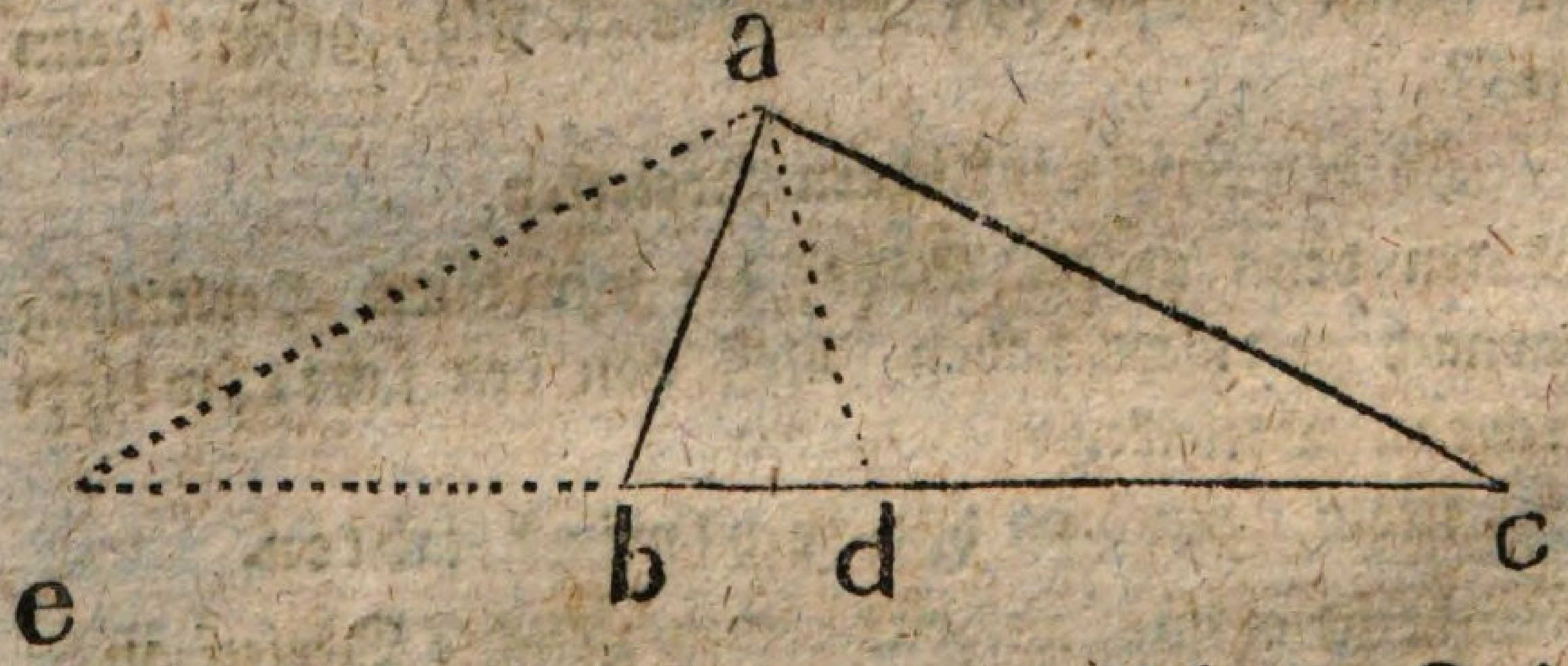
In dieser so wie in jeder geometrischen Proportion verhält sich das 1ste Glied zum 2ten, wie ꝛc. ꝛc.
Und eben so richtig können wir schließen: das 1ste Glied verhält sich zum 3ten, wie das 2te zum 4ten.

d. h.:

ab : Sin. c = bc : Sin. a.

Also die eine Seite hat zu dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels eben dasselbe Verhältniß, wie jede andere Seite zu dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels.

§. 24.



Ich habe hier, in dem vor uns stehenden Dreiecke, die Länge der Seite ab auf die andere Seite bc gelegt, also bd = ab gemacht, bc über b hinaus in gerader Richtung, um eben so viel als ab verlängert, folglich ab = bd = be.

Wo treffen diese 3 Linien mit einander zusammen?

In b.

Wenn ich nun aus diesem Punkte b mit der genannten Länge, einen Kreis beschreibe; was werden denn ab, bd und be für Linien in Absicht des Kreises?

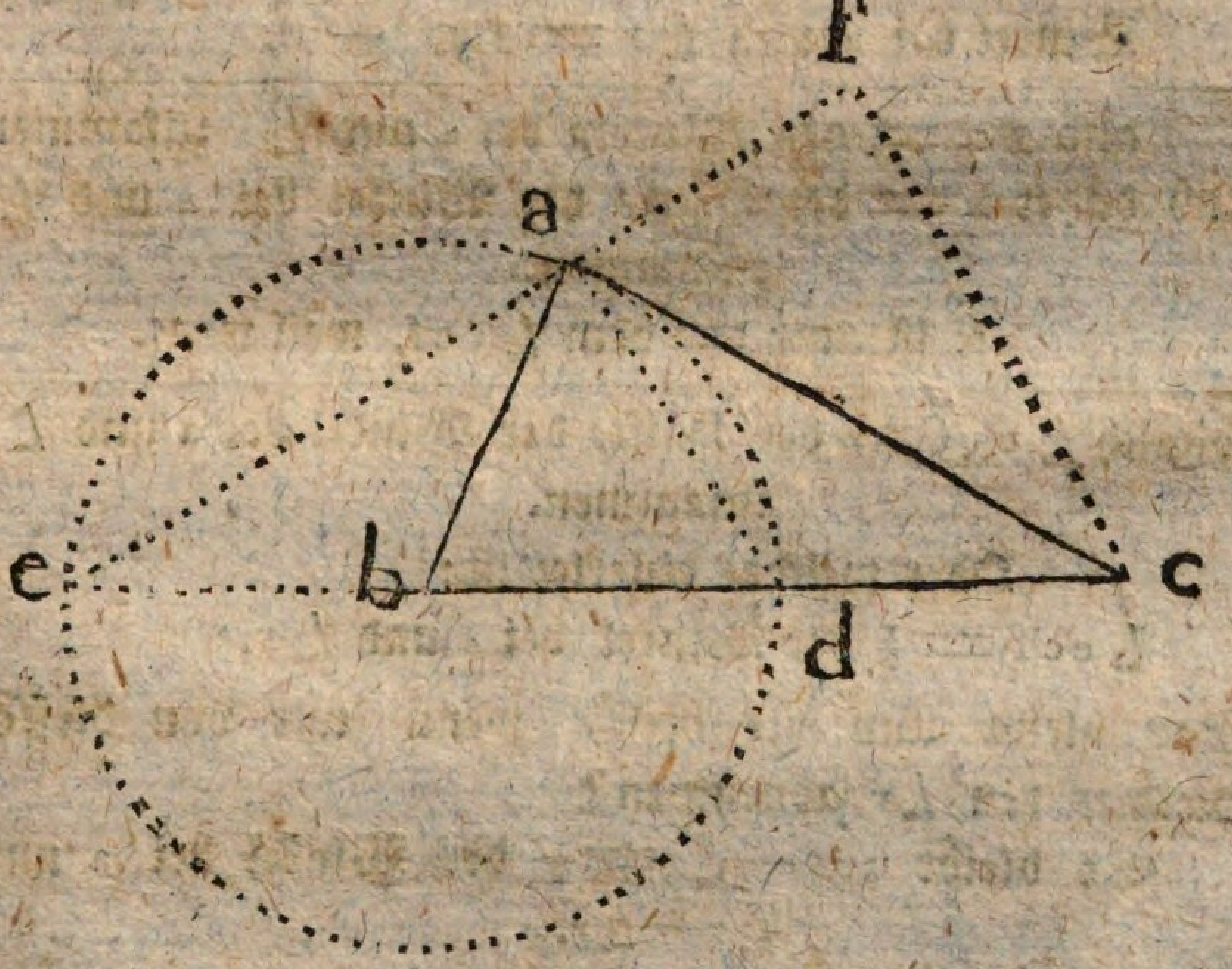
Halbmesser.

Und ed — —?

Wird der Durchmesser.

Wie groß ist der Peripheriewinkel ead, weil er mit seinen beiden Schenkeln auf den Endpunkten des Durchmessers steht?

ead ist 90° oder ein rechter Winkel.



Jetzt haben wir aus dem Punkte c eine gerade Linie cf gezogen, parallel mit ad, dann die Punkte eaf auch durch eine gerade Linie mit einander verbunden, welchen Winkel erhalten wir denn bei f?

Warum — —?

Und nun wollen wir die Dreiecke efc und afc mit einander vergleichen. —

Worin kommen sie mit einander überein?

Weil wir ferner ad = ab machten; das Dreieck abd also ein gleichschenklichtes Dreieck ist, was können wir deswegen von den Winkeln an der Grundlinie, hier bei a und d, behaupten?

So ist der Winkel bei a = dem Winkel bei d.

Beide zusammen genommen sind also = 2x.

Es sind aber die Winkel bei a und d nemlich hier genannt $o + x = 180^\circ - u$.

folglich $2x = 180^\circ - u$.

In dem andern Dreiecke bac sind aber auch die Winkel bei a und ∠ r = $180^\circ - u$.

---

also 2x = den Winkeln bei a und ∠ r zusammen.

und daher x = der Hälfte der Winkel bei a und ∠ r zusammen.

x ist auch = dem ∠ ecf, weil rc. rc.

---

folglich ∠ ecf = der Hälfte der Winkel bei a und ∠ r zusammen.

Oder welches einerlei ist:

∠ ecf = $\frac{1}{2}$ der Winkel bei a und ∠ r.

Was bleibt nun als Rest, wenn wir von diesem Gleichen den ∠ r abnehmen?

So bleibt ecf — ∠ r = $\frac{1}{2}$ der Winkel bei a und ∠ r — ∠ r.

d. i.:

ecf — ∠ r = $\frac{1}{2}$ der Winkel bei a — ∠ r.

oder ecf — ∠ r = $\frac{1}{2}$ der Winkel bei a — ∠ r zusammen.

ecf — ∠ r = acf.

---

folglich acf = $\frac{1}{2}$ der Winkel bei a — ∠ r zusammen.

Weil also der Winkel ecf so groß ist, als die Hälfte der Winkel bei a und ∠r zusammen; was folgt daraus für die Tangente von ecf?

So ist auch die Tangente von ecf so groß, als die Tangente von der Hälfte der Winkel bei a und dem ∠r.

Und weil acf gleich ist der Hälfte der Winkel bei a — ∠r; wie muß denn auch die Tangente von dem erstgenannten, ∠acf, sich zu der Tangente von der Hälfte der Winkel bei a und dem Winkel bei r verhalten?

So muß auch die Tangente von acf gleich seyn der Tangente von der Hälfte der Winkel bei a und dem ∠r zusammen.

Nun haben wir aber in einem der vorhergehenden Sphen gehabt, daß in einem rechtwinklichten Dreiecke sich der Sin. tot. zu der Tangente eines spitzigen Winkels verhält, wie die Cathete, welche an diesem Winkel liegt, zu der gegenüberstehenden Cathete; also verhält sich in dem rechtwinklichten Dreiecke efc:

fc : ef = Sin. tot. ; Tang. ecf.

---

oder fc : Sin. tot. = ef : Tang. ecf.

und in dem rechtwinklichten Dreiecke afc:

fc : af = Sin. tot. : Tang. acf.

---

oder fc : Sin. tot. = af : Tang. acf.

Weil hier nun zwei Größen jede für sich einer dritten gleich sind, so folgt aus diesen beiden Proportionen, daß

ef : Tang. ecf = af : Tang. acf.

und also auch das erste Glied zum 3ten, wie das 2te zum 4ten Gliede,

d. h.:

ef : af = Tang. ecf : Tang. acf.

Da sich nun in dem großen Dreiecke verhält

ec : dc = ef : af;

so folgt nach dem eben angeführten Grundsatze; daß

ec : dc = Tang. ecf : Tang. acf.

Diese Tangenten sind sich aber gleich.

Tang. ecf = der Tangente von der halben Summe der beiden Winkel bei a und dem ∠r zusammen.

Tang. acf = der Tangente von der halben Differenz der beiden Winkel bei a und dem ∠r.

---

folglich ec : dc = die Tang. von der halben Summe der beiden Winkel bei a und dem ∠r zusammen.

zu

der Tangente von der halben Differenz der beiden Winkel bei a und dem ∠r.

Eben so können wir statt der Seite ec nehmen bc + ba, und statt dc = bc — ba.

Also bc + ba : bc — ba = Tang. von der halben Summe der Winkel bei a und dem ∠r.

zu

der Tangente von der halben Differenz der Winkel bei a und dem ∠r.

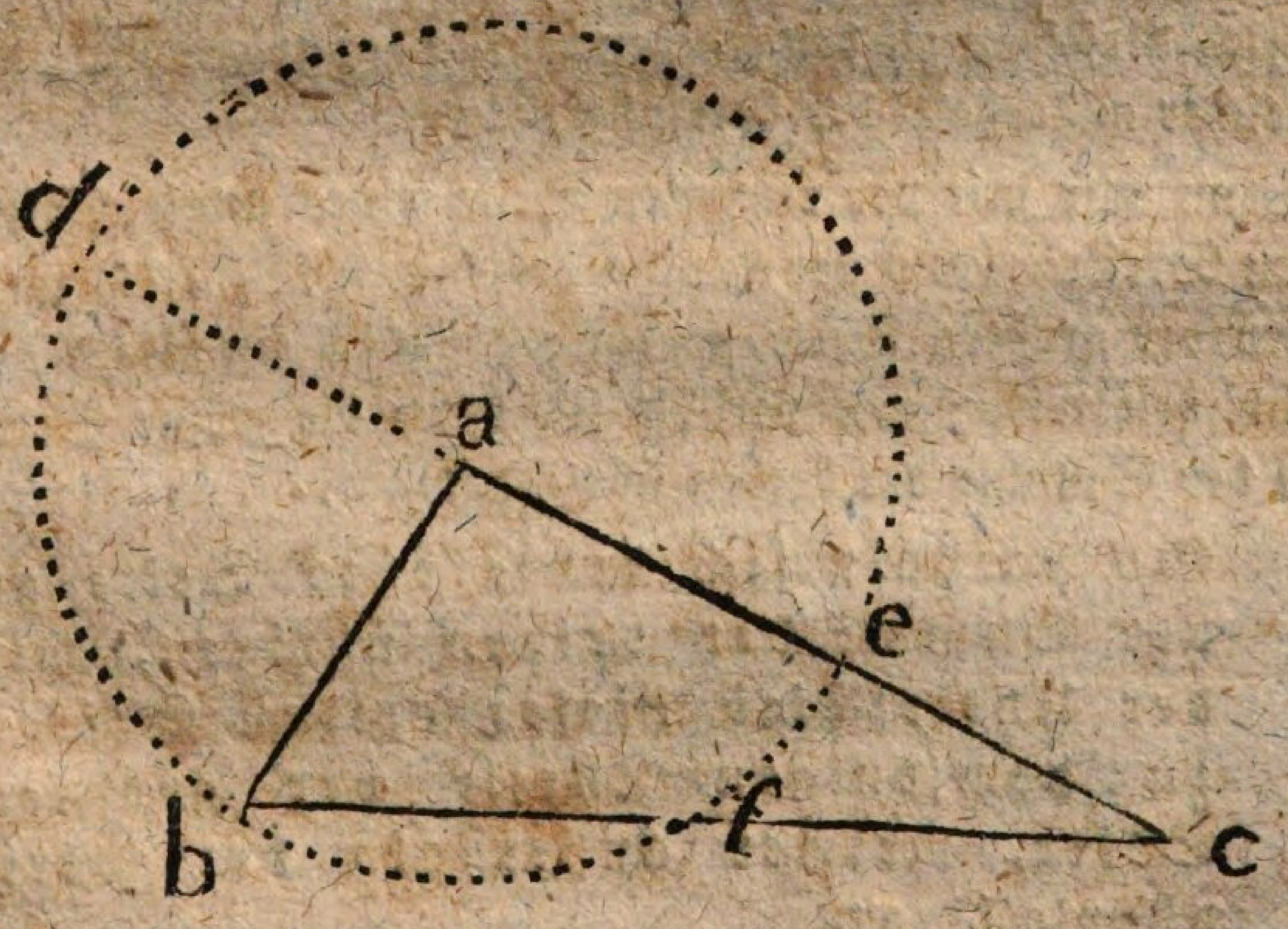
d. h. allgemein ausgedruckt:

In einem jeden geradlinigten Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten, zu dem Unterschiede derselben, wie die Tan-

gente von der halben Summe der beiden gegenüberstehenden Winkel, zu der Tangente von dem halben Unterschiede eben dieser Winkel.

§. 25.

Wir wollen das, in dem eben vorhergehenden §phen, gezeichnete Dreieck noch einmal ins Auge fassen; wieder mit der kürzesten Seite des Dreieckes — nicht aus b, sondern aus a — einen Kreis beschreiben, und sehen, ob wir auf diesem Wege nicht etwas Neues entdecken können.



Wir verlängerten noch die Seite ca über a hinaus bis zur Peripherie.

So haben wir also ein Dreieck dcb erhalten, welches mit der Spitze außerhalb der Peripherie liegt; und

was wissen wir, aus der Geometrie, von dem Verhältnisse der Seiten eines solchen Dreieckes?

Wir haben da bewiesen, daß ꝛc. ꝛc.

Also cb : cd = ce : cf.

Da cd = ca + ab oder den zwei kürzesten Seiten des gegebenen Dreieckes zusammen,

und ce = ca — ab oder dem Unterschied dieser beiden Seiten:

so verhält sich:

cb : ca + ab = ca — ab : cf.

d. h.:

Die größte Seite des Dreieckes verhält sich zu der Summe der beiden übrigen Seiten, wie der Unterschied derselben zu demjenigen Theile der größten Seite, welcher außerhalb der Peripherie liegt.

Wenn also mit der kürzesten Seite eines ungleichseitigen Dreieckes aus der Spitze desjenigen Winkels, welcher der größten Seite gegenüber stehet, ein Kreis beschrieben wird; wie verhält sich denn die größte Seite zu der Summe der beiden übrigen?

So verhält sich die größte Seite zu der Summe der beiden übrigen, wie der Unterschied dieser beiden Seiten zu demjenigen Theile der größten Seite, welcher außerhalb der Peripherie liegt.

Berechnung unbekannter Stücke in einem rechtwinklichten Dreiecke.

§. 26.

Nach den jetzt erklärten Lehrsätzen können wir nun aus den drei bekannten Stücken eines Dreieckes, die vierte unbekannte Größe durch eine Proportion finden.

Die rechtwinklichten Dreiecke machen eine kleine Ausnahme von der Regel. Es sollen nemlich nach der Erklärung des Worts Trigonometrie 3 Stücke gegeben seyn, und bei diesen ist schon der rechte Winkel bekannt. Daher brauchen hier also nur 2 Stücke gegeben zu seyn; und deswegen können in Ansehung der gegebenen Stücke hier nur 2 Hauptfälle statt finden.

In ersterer Hinsicht finden wieder 3 Fälle statt, es kann nemlich gegeben seyn:

a) die Hypothenuse und die eine Cathete.

b) die Hypothenuse und die andere Cathete, und

c) beide Catheten.

Es sei also in dem ersten Falle des rechtwinklichten Dreieckes die Hypothenuse, und die eine Cathete gegeben. z. B. s. Fig. in dem Dreiecke abc, ac, und ab; und man soll nun die beiden spitzigen Winkel finden — x und u.

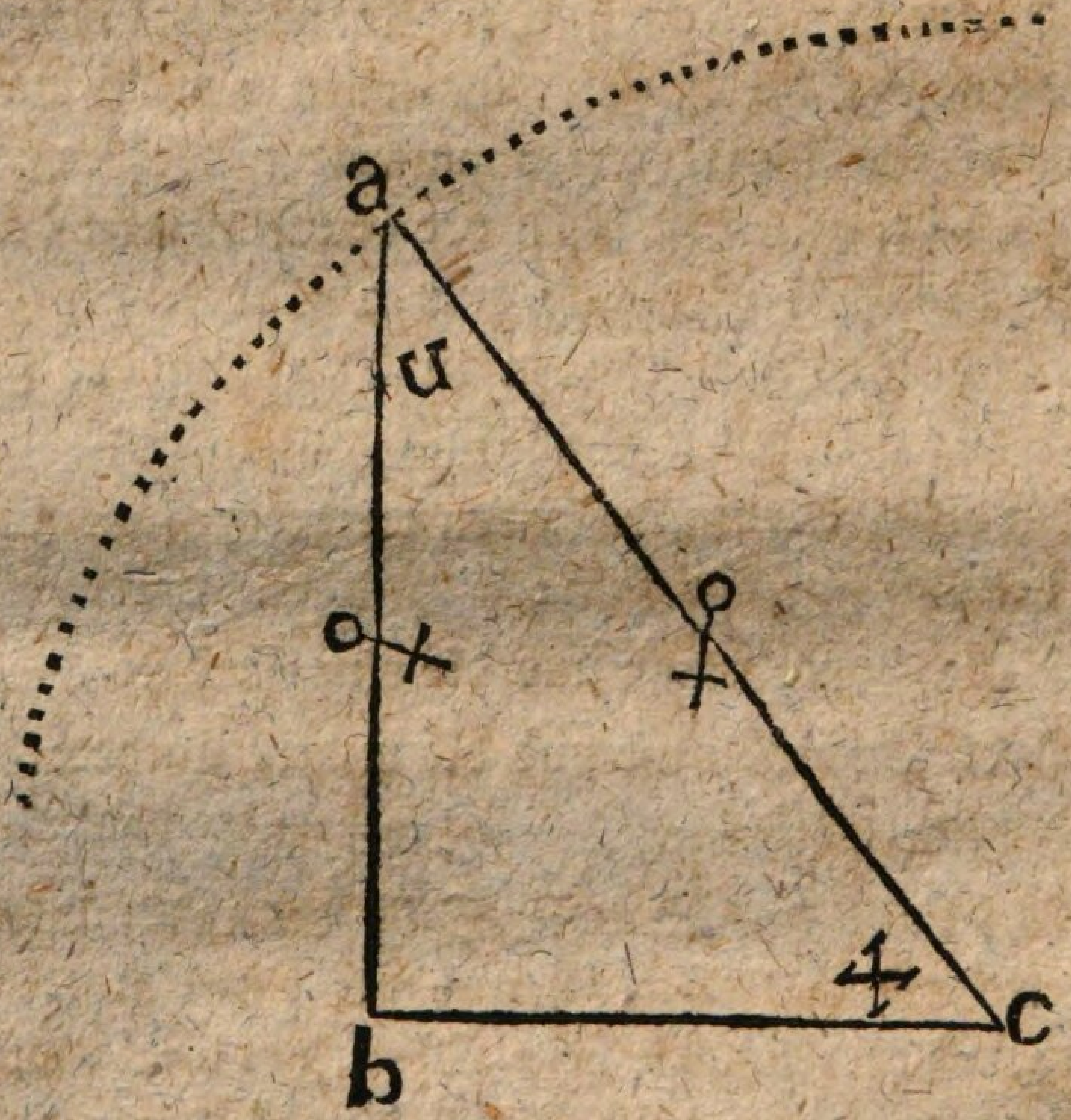
Hinleitungs-Gedanken:

Gesetzt nun, wir wollten ∠x zuerst finden; wie sollen wir denn wir denn wol schließen? —

Wüßten wir den Sin. von dem ∠x, so könnten wir darnach in den Tabellen die Größe des Winkels suchen.

Den Sin. erhalten wir, wenn wir ihn als viertes Glied in eine geometrische Proportion zu bringen suchen.

Die gegebenen bekannten Seiten des Dreieckes müssen also die ersten 3 Glieder der Proportion seyn.



Wenn wir von dem Punkte c aus mit der Linie ca einen Kreis beschreiben; was ist ca denn für eine Linie in Absicht des Kreises?

Und ab — — —?

Wie können wir nun schließen?

Es verhält sich:

ac : ab = Radius : Sin. x

$$\text{Sin. } x = \frac{ab \times R}{ac}$$

Es sei also z. B. ac = 215 Fuß,
und ab = 128';
wie finden wir nun den Sin. des Winkels x?

Wir multipliciren ꝛc. ꝛc.

Haben wir nun den Sin., so dürfen wir den nur in den Tabellen aufsuchen, um den Winkel zu erhalten.
Dies wäre aber umständlich, daher bedient man sich lieber der Logarithmen,

nemlich:

Es sei ac = 34° 5' 6''
und ab = 32° 1'

ac : ab = Sin. tot. : Sin. c

d. i. 3456'' : 3210'' = Sin. tot. : Sin. c

log. Sin. c = log. 3210 + log. Sin. tot. — log. 3456''

log. 3210 = 3.5065050
log. Sin. tot. = 10.0000000

13.5065050
log. 3456 = 3.5385737

log. Sin. c = 9.9679313.

Dieser Logarithmus findet sich in den Tabellen nicht; daher nehmen wir den, welcher ihm am nächsten kommt, nemlich: 9.9679267 = 68° 15'

der gesuchte ∠c ist also 68° 15'.

Wie finden wir nun den Winkel bei a?
Da, nach der Voraussetzung, ∠b ein rechter ist; wie viele Grade müssen denn die beiden Winkel bei a und c zusammen genommen ausmachen?

Und weil wir nun wissen, wie groß der ∠ bei c ist; wie finden wir denn den Winkel bei a?

Wir finden den Winkel bei a, wenn wir die Größe des Winkels bei b, nemlich $68^\circ\ 15'$ von 90° subtrahiren.

Aber ein stumpfer Winkel von $180^\circ - 68^\circ\ 15'$ hat ja denselben Sin.; welcher ist nun der gesuchte: der spitzige oder stumpfe Winkel?

Der stumpfe Winkel kann es nicht seyn, weil in einem rechtwinklichten Dreieck kein stumpfer Winkel vorkommen kann: es muß also durchaus der spitzige seyn, der bei dem gefundenen Sin. in den Tafeln steht.

Wie aber, wenn wir erst den Winkel bei a finden sollten; wie müßten wir denn schließen? —

Welche trigonometrische Linie ist der Sin. von c in Absicht auf den ∠ a?

Der Sin. von c ist der Cos. von a.

Wie müssen wir also die geometrische Proportion setzen —; welches muß das 4te Glied werden?

Der Cos. von a, nemlich:

$$ac : ab = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } a$$

Was müßten wir aber ebenfalls, bei dem gegebenen Dreieck, als Vorbereitung thun?

Wir müßten erst mit ac so einen Kreis beschreiben, daß c der Mittelpunkt ist.

Wie heißt nun der Halbmesser?

Wie der Cos. von a?

Es verhält sich also:

$$ac : ab = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } a$$

folglich: $\text{Cos. } a = \dfrac{ab \times \text{Sin. tot.}}{ac.}$

oder kürzer:

$\log. a = \log. ab + \log. \text{Sin. tot.} - \log. ac.$

Haben wir nun in dem rechtwinklichten Dreiecke aus den gegebenen Theilen, nemlich ab und ac alle unbekannte Stücke des Dreieckes gefunden?

Die Winkel haben wir alle, es fehlt uns noch die Seite bc.

Wie müssen wir nun wol die Proportion setzen, um diese uns noch unbekannte Seite als viertes Glied zu erhalten? —

Wenn wir Winkel oder trigonometrische Linien erhalten wollten, so fingen wir mit den Seiten an; wenn wir nun umgekehrt die Seiten finden wollen; womit müssen wir denn wol beginnen?

Mit trigonometrischen Linien;

also:

$$\text{Sin. tot.} : \text{Cos. } c = ac : bc$$

d. i.: $\text{Sin. tot.} : \text{Cos. } 68^\circ 15' = 3456'' : bc$

$$\log. bc = \log. \text{Cos. } 68^\circ 15' + \log. 3456'' - \log. \text{Sin. tot.}$$

$$\log. \text{Cos. } 68^\circ 15' = 9.5688555$$
$$\log. 3456'' = 3.5385737$$
$$13.1074292$$
$$\log. \text{Sin. tot.} = 10.0000000$$
$$\log. bc = 3.1074292.$$

Dieser Logarithmus kommt dem, von 1281 am nächsten, folglich ist die gesuchte Seite $bc = 1281''$ oder $12^\circ 8' 1''$.

Weißt du denn auf keine andere Weise die Seite bc zu finden? —

(Erinnere dich nur an den Pythagoräischen Lehrsatz, und du wirst sie leicht ohne meine Hülfe finden.)

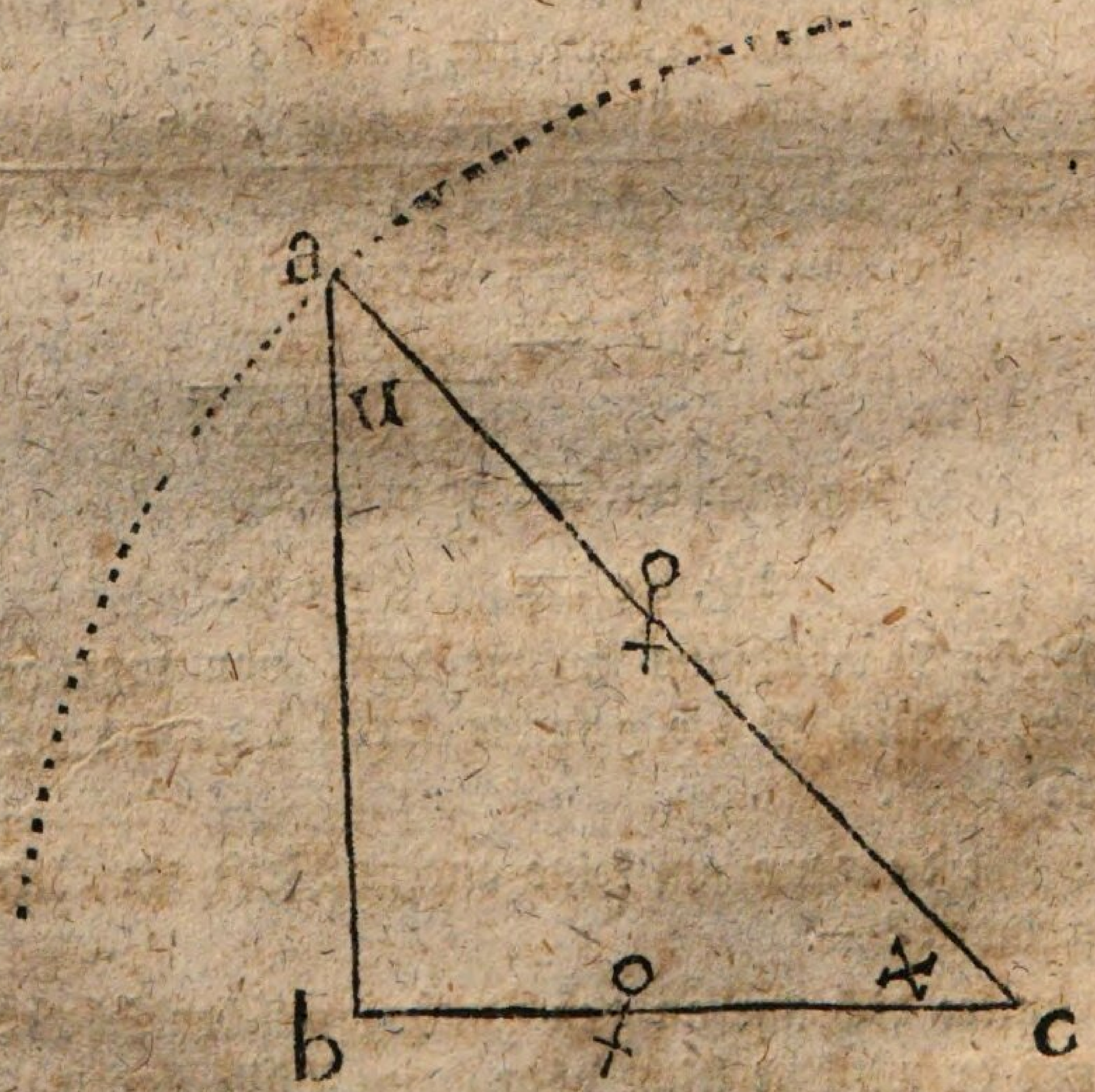
Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist das Quadrat von ac — s. Fig. — gleich den beiden Quadraten von ab und bc zusammen.

Nehmen wir nun das Quadrat von ab; von dem Quadrate von ac: so bleibt das Quadrat von bc nach.

Und wir erhalten also die Seite bc, wenn wir aus diesem Quadrate die Quadratwurzel ziehen.

§. 27.

Der 2te Fall wäre nun der: wenn die Hypothenuse und die andere Cathete bekannt sind; wie finden wir daraus die beiden spitzigen Winkel, und überhaupt alle noch unbekannte Stücke des Dreieckes? —



Hinleitungsgedanken:

Wir wollen zuerst den $\angle x$ suchen.

Was thaten wir vorher, als Vorbereitung, um eine Proportion zu erhalten?

Was können wir nun auch wol thun?

Und weil wir einen Winkel oder eine trigonometrische Linie als 4tes Glied haben sollen; womit müssen wir denn wol in der Proportion anfangen?

Da wir mit ac von c aus einen Kreis beschrieben haben, was ist ac denn für eine Linie in Absicht des Kreises?

ac ist der Halbmesser des Kreises.

Welche trigonometrische Linie ist denn ab?

Und bc — —?

Wie schließen wir nun, um den Winkel x, als viertes Glied in eine Proportion zu erhalten?

$$ac : cb = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } x.$$

Oder mit Logarithmen:

$$\log. \text{Cos. } x = \log. cb + \log. \text{Sin. tot.} - \log. ac$$

Nun sei z. B. ac = 763″

und bc = 592″

$$\log. 592 = 2.7723217.$$
$$\log. \text{Sin. tot.} = 10.0000000$$
$$12.7723217.$$
$$\log. 763'' = 2.8825245$$
$$\log. \text{Cos. } x = 9.8897972$$

Wenn wir jetzt diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Sin. suchen; so finden wir ihn nicht völlig so übereinstimmend in den Tafeln; wir nehmen daher zwei andere, zwischen denen er fällt, nemlich den nächst kleinern:

$$9.8897850 = 50^\circ\, 53'$$

und den nächst größern:

$$9.8898877 = 50^\circ 54'$$

Der gefundene Logarithmus 9.8897972 muß also zu einer Zahl gehören, welche größer als 50° 53′, und kleiner, als 50° 54′ ist; daher muß die Seite außer 50° 53′ noch einige Secunden enthalten. Wollte man also diese noch wissen, so müßte man den Satz anwenden — s. unten von den Logarithmen — daß sich der Unterschied der Zahlen beinahe wie der Unterschied der Logarithmen verhält, z. B.:

$$9.8897850 = \log.\ 50^\circ 53'$$
$$9.8898877 = \log.\ 50^\circ 54'$$

Unterschied = 1027

$$9.8897850 = \log.\ 50^\circ 53'$$
$$9.8897972 = \text{dem gefundenen Log.}$$

Unterschied = 122;

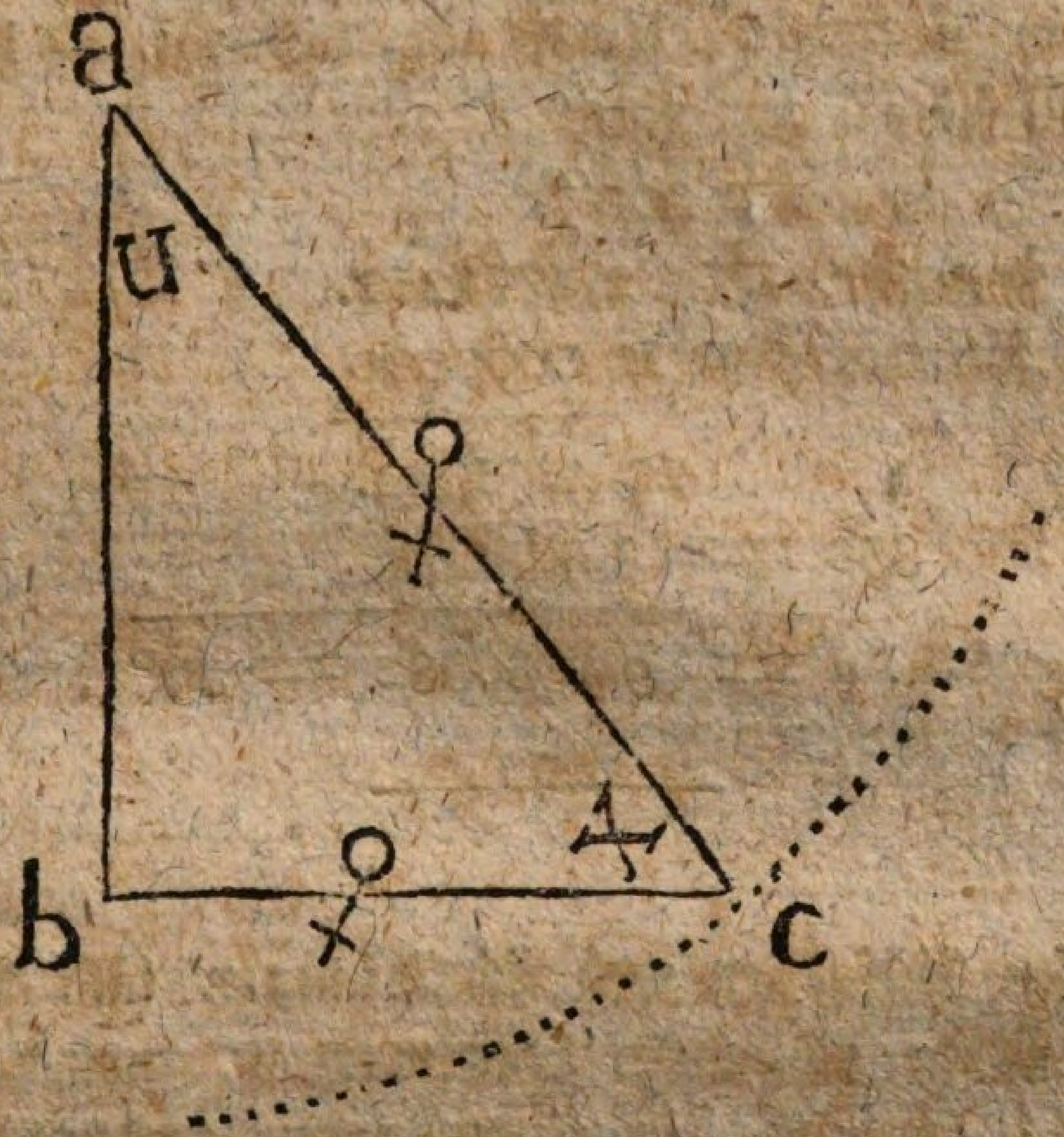
folglich verhält sich:

$$1027 : 112 = 60'' : x$$
$$x = 7''$$

Der Complementswinkel von x ist also eigentlich 50° 53′ 7″ groß; folglich ist der Winkel x genauer bestimmt 39° 6′ 53″.

Wenn wir aber den ∠u zuerst finden wollten; wie wäre dies wol zu bewerkstelligen? —

z. B.:



Da wir hier mit ac von a aus einen Kreis beschrieben haben; was ist ac denn für eine Linie in Absicht des Kreises?

ac ist der Halbmesser.

Welche trigonometrische Linie ist denn bc?

bc ist der Sin. des Winkels u.

Und wo liegt der ∠u — den wir suchen — in Absicht des Kreises?

Der Winkel u liegt am Mittelpunkte des Kreises. Wie finden wir diesen nun — oder in welche Proportion würde der Winkel u oder der Sin. des Winkels u als viertes Glied stehen?

(Erinnere dich nur, daß, wenn wir im 2ten Verhältnisse der geometrischen Proportion, trigonometrische Linien haben sollen, wir mit den Seiten anfangen.)

$$ac : bc = \text{Sin. tot.} : \text{Sin. u.}$$

oder mit Logarithmen:

$$\log. \text{Sin. u} = \log. bc + \log. \text{Sin. tot.} - \log. a.$$

Nun set $ac = 350''$

$bc = 300''$

$$\log. 300 = 2.4771212.$$
$$\log. \text{Sin. tot.} = 10.0000000$$

$$12.4771212.$$
$$\log. 350 = 2.5440680.$$

$$\log. \text{Sin. u} = 9.9330532 = 59^\circ$$

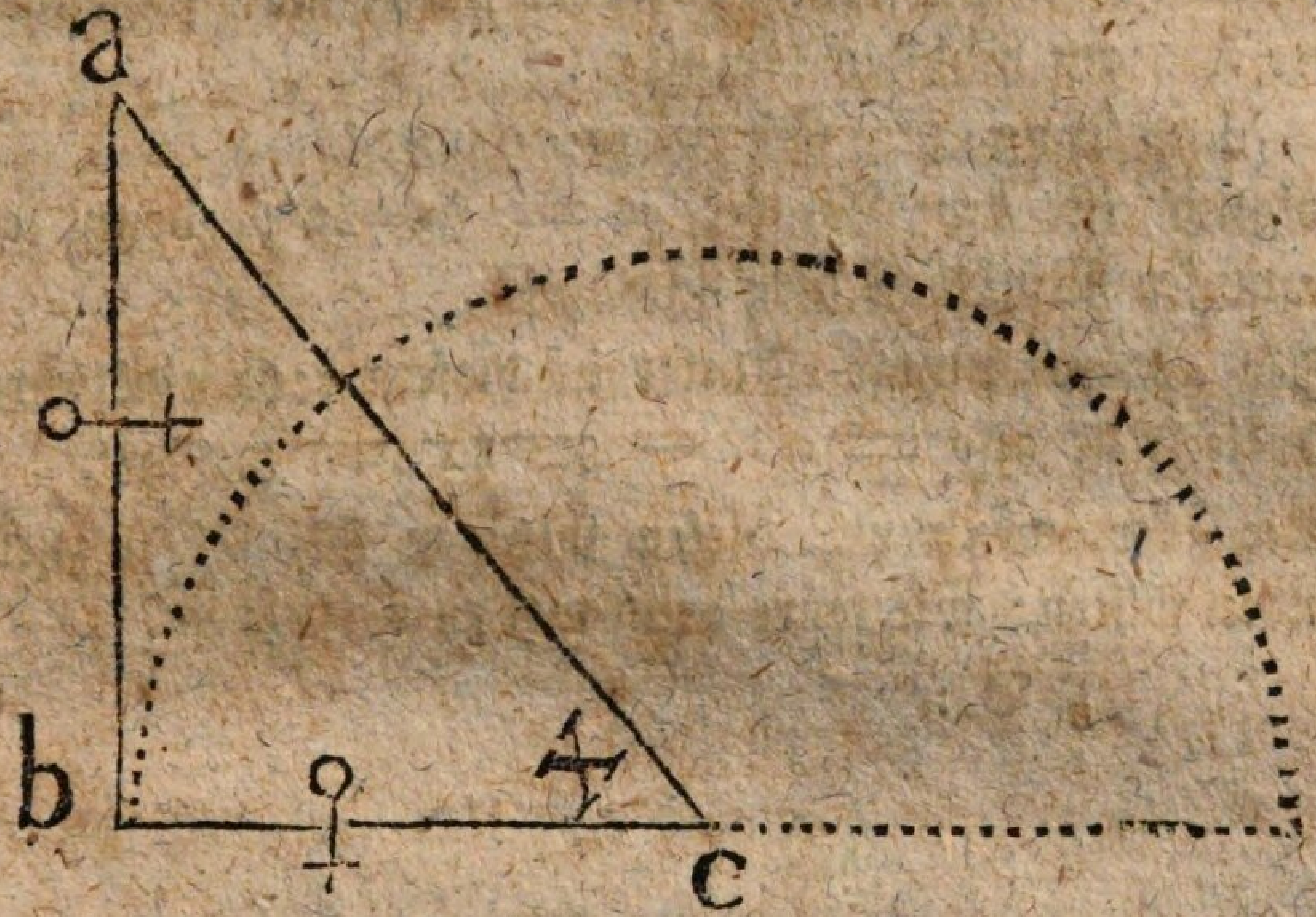
Aus diesen Aufgaben und Auflösungen läßt sich nun folgende Frage allgemein beantworten, nemlich: wie verhält sich allemal, in einem jeden rechtwinklichten Dreiecke die Hypothenuse zu einer der Catheten?

In einem jeden rechtwinklichten Dreiecke verhält sich allemal die Hypothenuse, zu einer der Catheten, wie der Sin. tot. zu dem Sin. des anliegenden oder zu dem Cos. des gegenüberliegenden Winkels.

§. 28.

Der 3te Fall ist nun endlich der: wenn beide Catheten gegeben sind, oder welches einerlei ist: aus den beiden gegebenen Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, die beiden spitzigen Winkel und die Hypothenuse zu finden.

z. B.:



Die beiden Catheten sind gegeben, neimlich ab und bc, und wir sollten erst den Winkel x suchen; wie wäre dies zu bewerkstelligen?

Da wir mit der Seite bc einen Kreis aus c beschrieben; welche Linie ward bc dadurch in Absicht des Kreises?

Und die andere Cathete ab — —?

Wie können wir nun schließen?

$$bc : ab = \text{Sin. tot.} : \text{Tang. } x$$

oder mit Logarithmen:

$$\log. \text{Tang. } x = \log. \text{Sin. tot.} + \log. ab - \log. bc.$$

Nun sei z. B. die Seite ab = 2917″
und die Seite bc = 2345″

log. 2917 =	3.4649364.
log. Sin. tot. =	10.0000000
	13.4649364
log. 2345 =	3.3701428
log. Tang. x =	10.0947936.

Sucht man nun diesen Logarithmus unter den Logarithmen der Tangenten, so findet man folgenden, der ihm am nächsten kömmt:

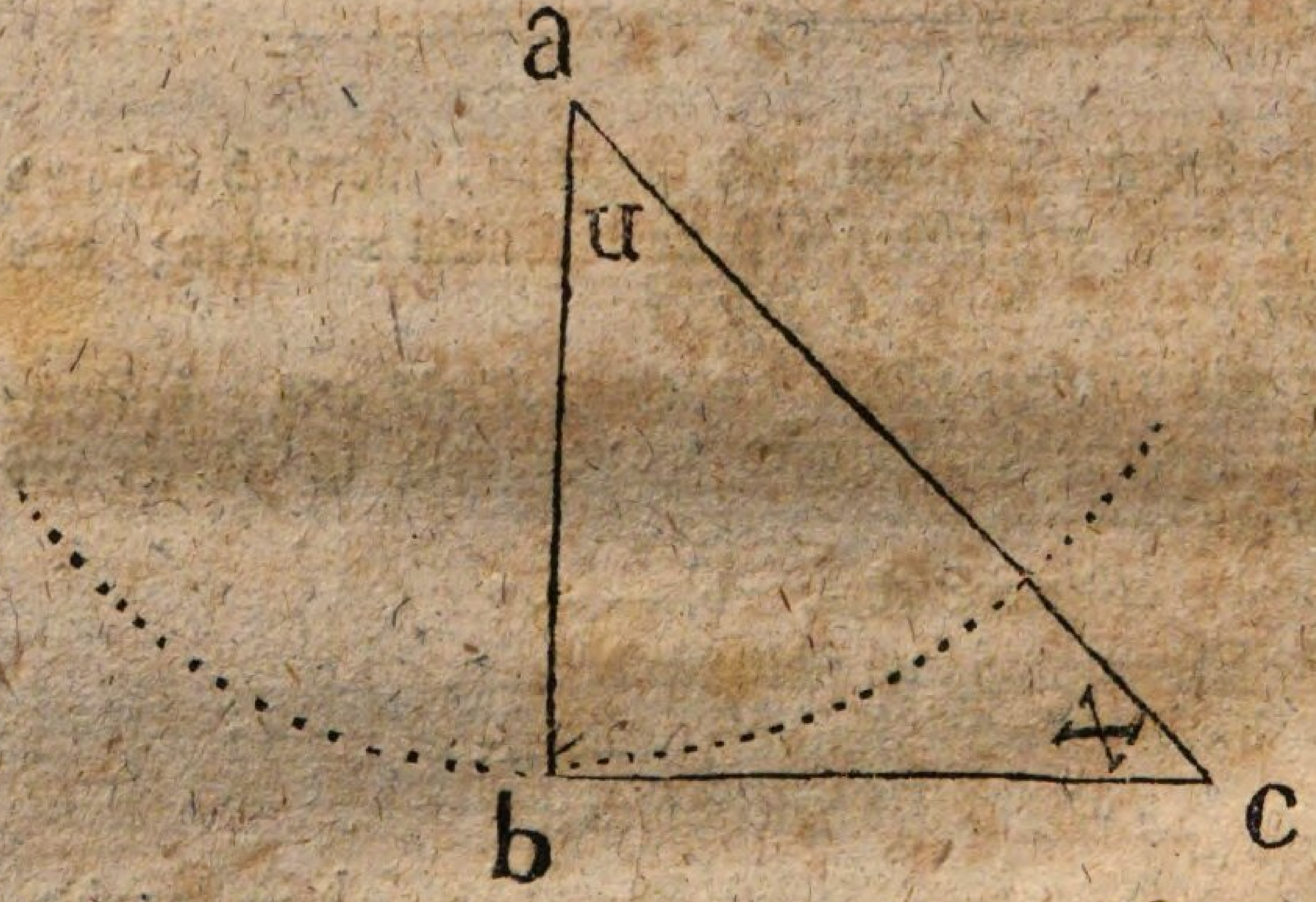
log. Tang. 51° 12′ = 10.0947328,

folglich ist der Winkel x = 51° 12′; denn ein stumpfer Winkel ist hier unmöglich.

Der andere spitzige Winkel in diesem rechtwinklichten Dreiecke ist also = 90° — 51° 12′ = 38° 48′.

Wie aber, wenn wir diesen spitzigen Winkel u zuerst finden sollten; wie wäre denn wol zu verfahren?

z. B.:



Da wir mit der Seite ab einen Kreis von a aus beschrieben; welche Linie ward ab dadurch in Absicht des Kreises?

Und die Seite bc — —?

Wie können wir nun schließen?

ab : bc = Sin. tot. : Tang. u.

So wüßten wir also die beiden spitzigen Winkel in dem

rechtwinklichten Dreiecke zu finden — welches unbekannte Stück sollen wir nun noch haben?

Nun noch die Hypothenuse.

Wie müssen wir denn nun schließen, um die Hypothenuse zu erhalten?

$$\text{Sin. x : Sin. tot.} = \text{ab : ac}$$

$$\text{d. i.: Sin. } 51^\circ\ 12' : \text{Sin. tot.} = 2917 : \text{ac}$$

$$\log.\text{ac} = \log.\text{Sin. tot.} + \log. 2917 - \log.\text{Sin. } 51^\circ\ 12'.$$

$$\log.\text{Sin. tot.} = 10.0000000.$$

$$\log. 2917 = 3.4649364$$

$$13.4649364$$

$$\log.\text{Sin. } 51^\circ\ 12' = 9.8917258$$

$$\log.\text{ac} = 3.5732106$$

welchem der Logarithmus der Zahl 3743 sehr nahe kommt; daher die Hypothenuse = 3743″ = 37° 4′3 ′.

Weißt du denn nicht auf eine andere — und weit kürzere Art die Hypothenuse zu finden, ohne erst einen Winkel suchen zu dürfen? —

(Erinnere dich nur an den Pythagoräischen Lehrsatz)

Wie heißt der noch?

Das Quadrat der Hypothenuse ist den beiden Quadraten der Catheten zusammen genommen gleich.

Können wir denn hier leicht die Quadrate der beiden Catheten erhalten?

Ja, uns sind die Seiten davon bekannt.

Wenn wir diese Quadrate der Seiten zusammen geben, welches Quadrat haben wir denn dadurch zugleich auch erhalten?

Das Quadrat der Hypothenuse.

Und was haben wir nun nur zu thun, um die Hypothenuse zu erhalten?

Wir brauchen nur die Quadratwurzel herauszuziehen.

In diesen beiden Auflösungen liegt der Satz, daß in jedem rechtwinklichten Dreiecke der Radius sich verhält zur Tangente eines spitzigen Winkels, wie die Cathete, die an diesem spitzigen Winkel liegt, zu der Cathete, die diesem spitzigen Winkel gegenüber steht.

Auch wird man leicht bemerken, daß man noch auf eine andere Art schließen und dieselbe Aufgabe lösen kann. Um nemlich den Winkel u zu finden, ist es nicht durchaus nothwendig, daß wir uns mit ab einen Kreis beschrieben gedenken, sondern dies kann eben so gut mit bc geschehen. Alsdenn schließen wir: so wie sich verhält bc : ab = Sin. tot. : Cot. u.

Nur ist zu bemerken, daß wir uns in diesem Falle der Logarithmen nicht bedienen können, weil die Cotang. in den Tabellen nicht aufgezeichnet sind, welches nicht nöthig war.

Aehnliche Schlüsse lassen sich bei den ersten Auflösungen machen.

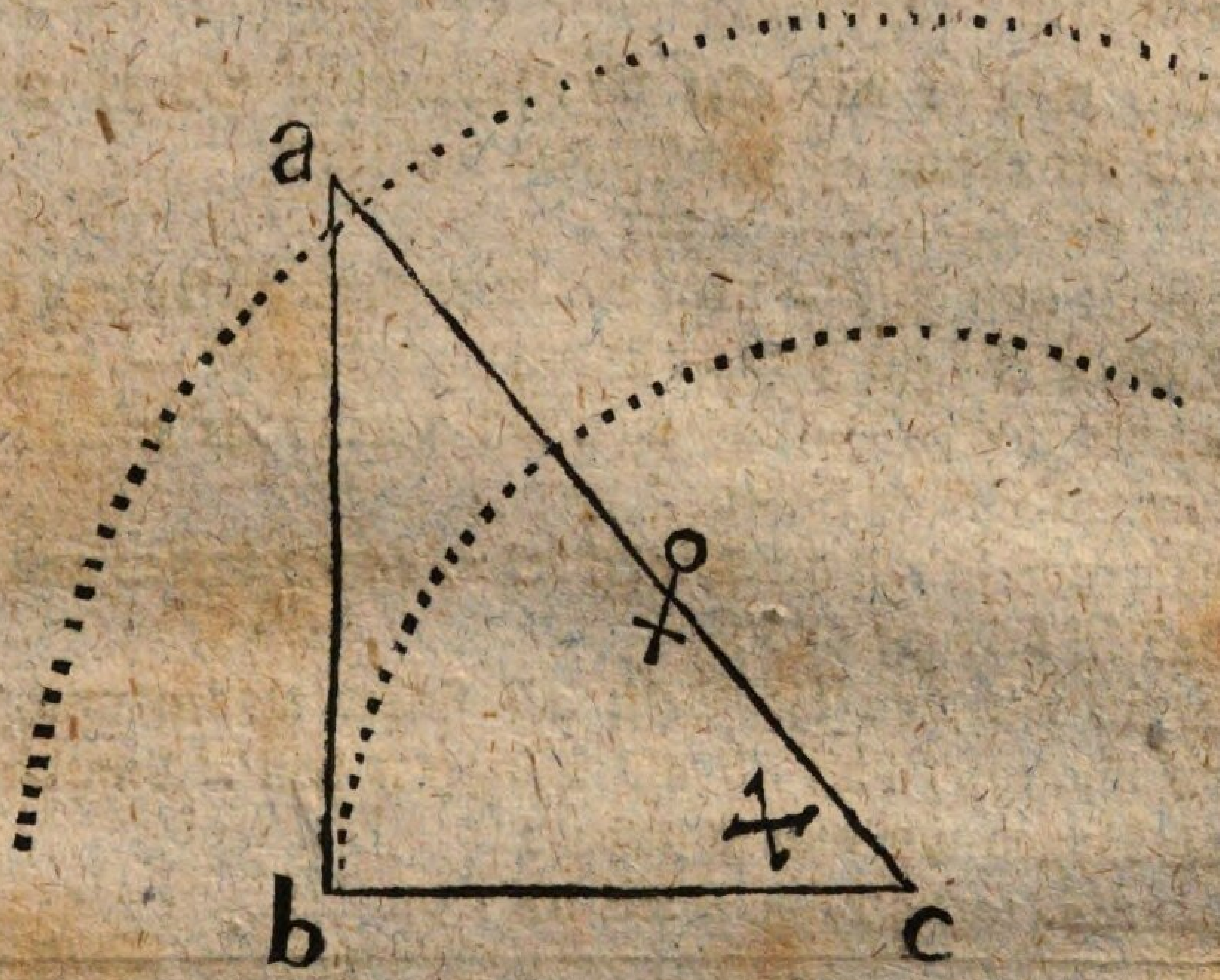
§. 29.

B. Wenn eine Seite und ein Winkel gegeben wird, und man denn das übrige finden soll.

Es sei also gegeben:

a. die Hypothenuse und ein spitziger Winkel x, und man soll nun zuerst die Seite ab finden.

z. B.:



Da wir mit a c aus c einen Kreis beschrieben haben; was für eine Linie ist denn a c in Absicht auf den Kreis?

Und a b — —?

Wie schließen wir nun?

Sin. tot. : Sin. x = a c : a b

Es sei die Seite a c = 4012″

und der Winkel x = 54° 30′

log. a b = log. Sin. 54° 30′ + log. 4012″ — log. Sin. tot.

log. Sin. 54° 30′ = 9.9106860

log. 4012″ = 3.6033609.

13.5140469.

log. Sin. tot. = 10.0000000

3.5140469.

Diesem Logarithmus kömmt in den Tafeln der Logarithmus von 3266 am nächsten; folglich muß die

Seite ab 3266 Zoll oder 32 Ruthen 6 Fuß und 6 Zoll enthalten.

Wie müßten wir aber die Proportion stellen, wenn wir die Seite bc zuerst haben wollten?

Sin. tot. : Cos. x = ac : bc.

Wenn nun aber b nicht die Hypothenuse, sondern eine Cathete und ein spitziger Winkel gegeben ist — es mag wieder x seyn — und man soll daraus die andern bekannten Stücke finden.

Wie groß ist erst der Winkel bei a, da die beiden andern Winkel bekannt sind?

Wenn wir nun die Seite ab finden wollen und bc als Sin. tot., und ab als Tangente von x bemerken; wie können wir nun schließen?

Sin. tot. : Tang. x = bc : ab

log. ab = log. Tang. x + log. bc — Sin. tot.

Es sei die Seite bc = 30 Ruthen
und der $\angle$ x = 45° 15′

so ist der $\angle$ bei a = 90° — 45° 15′ = 44° 45′.

log. Tang. x = 45° 15′	=	10,0037900
log. bc = 30°	=	1,4771212
		11,4809112
log. Sin. tot.	=	10,0000000
log. ab	=	1,4809112;

also ist nach den Tabellen, die Seite ab ohngefehr 30 Ruthen.

Um aber die Seite ac (die Hypothenuse) zu finden; was haben wir denn zu thun?

Wir müßten wol einen Kreis mit ac aus c beschreiben, um ac als Sin. tot. zu erhalten. s. Fig.

Was wäre b c denn für eine trigonometrische Linie in Absicht auf den Winkel x?

b c wäre der Cos. x.

Wir schließen also:

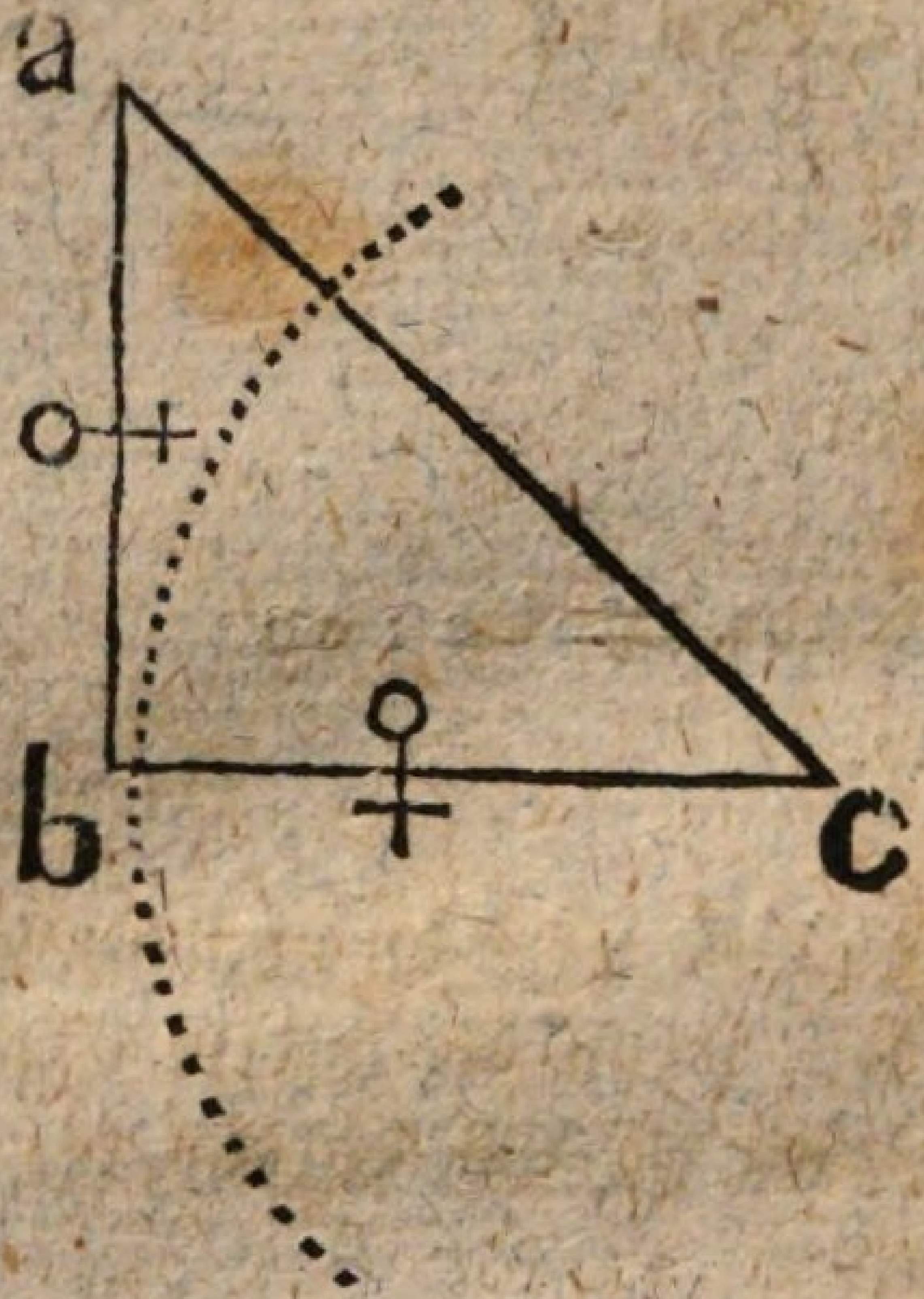
Cos. x : Sin. tot. = b c : a c

u. s. w.

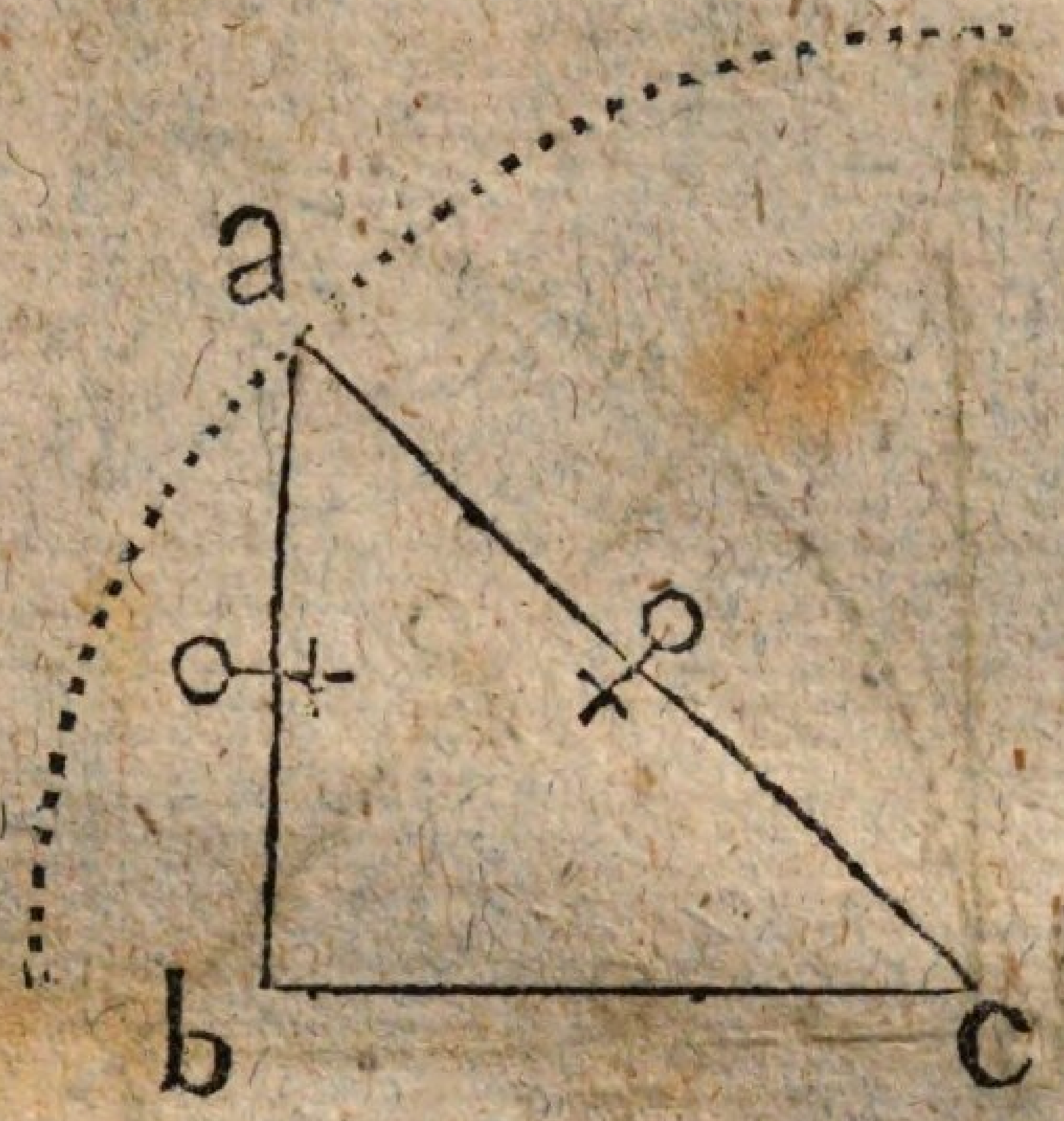
Ohne meine Hülfe wirst du nun gewiß wissen, wie man verfahren soll, wenn die andere Cathete und der Winkel bei a gegeben ist, um daraus die unbekannten Stücke herzuleiten.

Im Allgemeinen ist zu merken, daß wenn eine Seite gesucht werden soll, der Schluß anfangen soll mit der bekannten trigonometrischen Linie; wenn aber ein Winkel gesucht werden soll, so fängt man mit einer bekannten Seite an zu schließen.

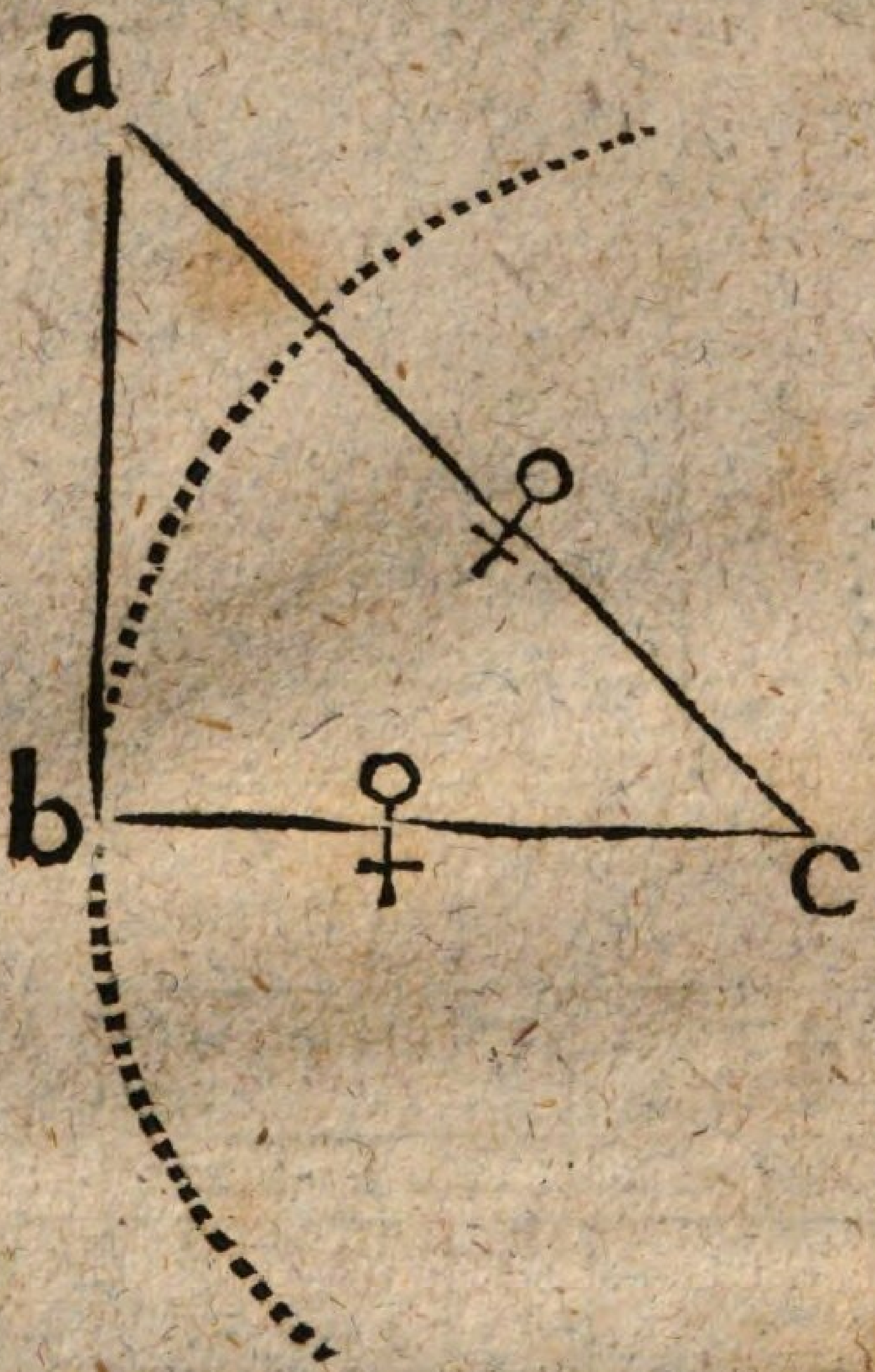
In einem rechtwinklichten Dreiecke abc sind:



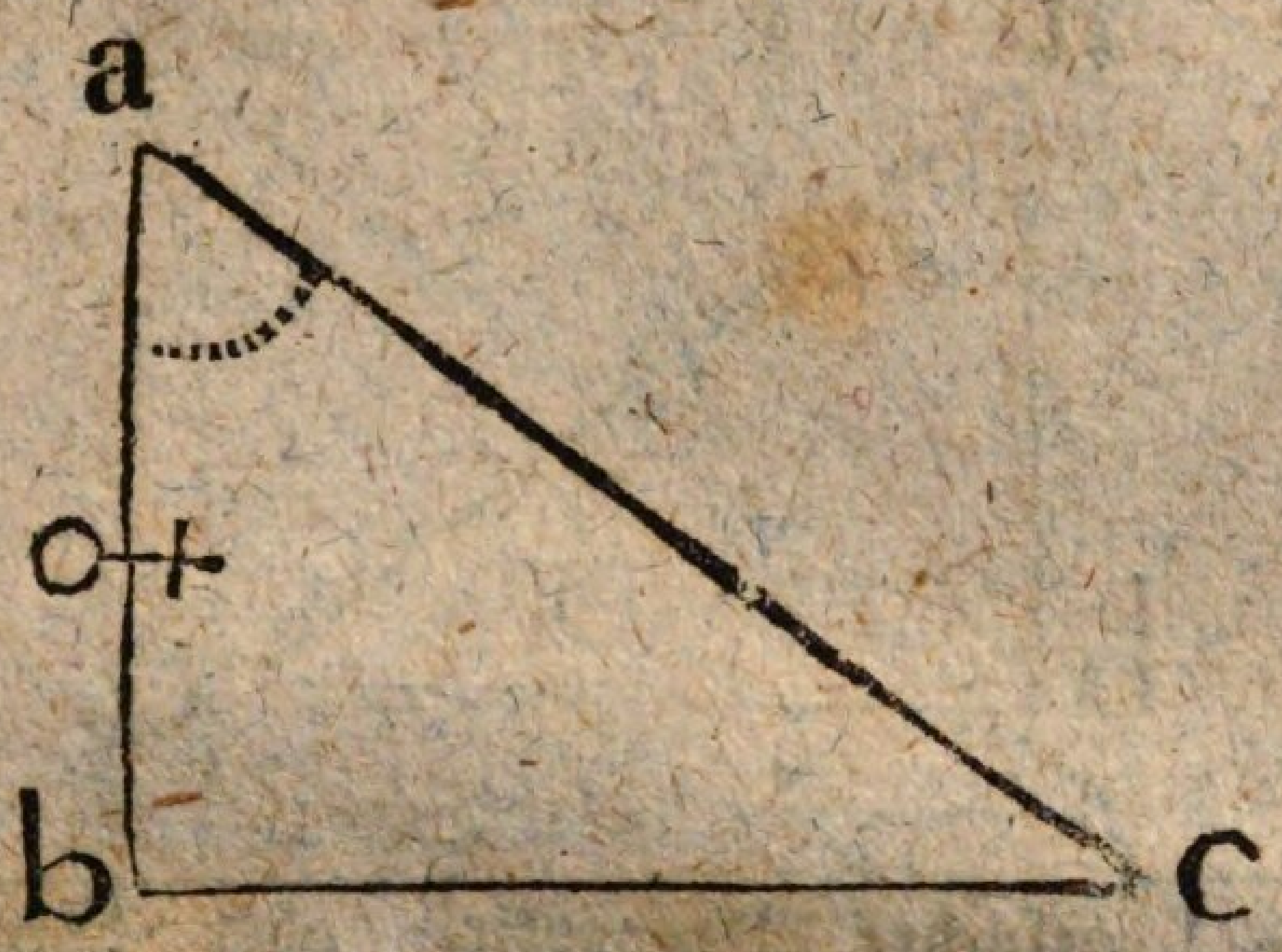
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungsregel.
ab, und bc	∠c	bc : ba = Rad. : Tang. c oder: ab : bc = Rad. : Cot. c
	∠a	ab : bc = Rad. : Tang. a, oder: bc : ba = Rad. : Cotang. a.
	die Seite ac	Wenn der ∠c erst gefunden ist: Sin. c : Rad. = ba : ac, Rad. : Cosec. c = ba : ac, Tang. c : Sec. c = ba : ac u. s. w.



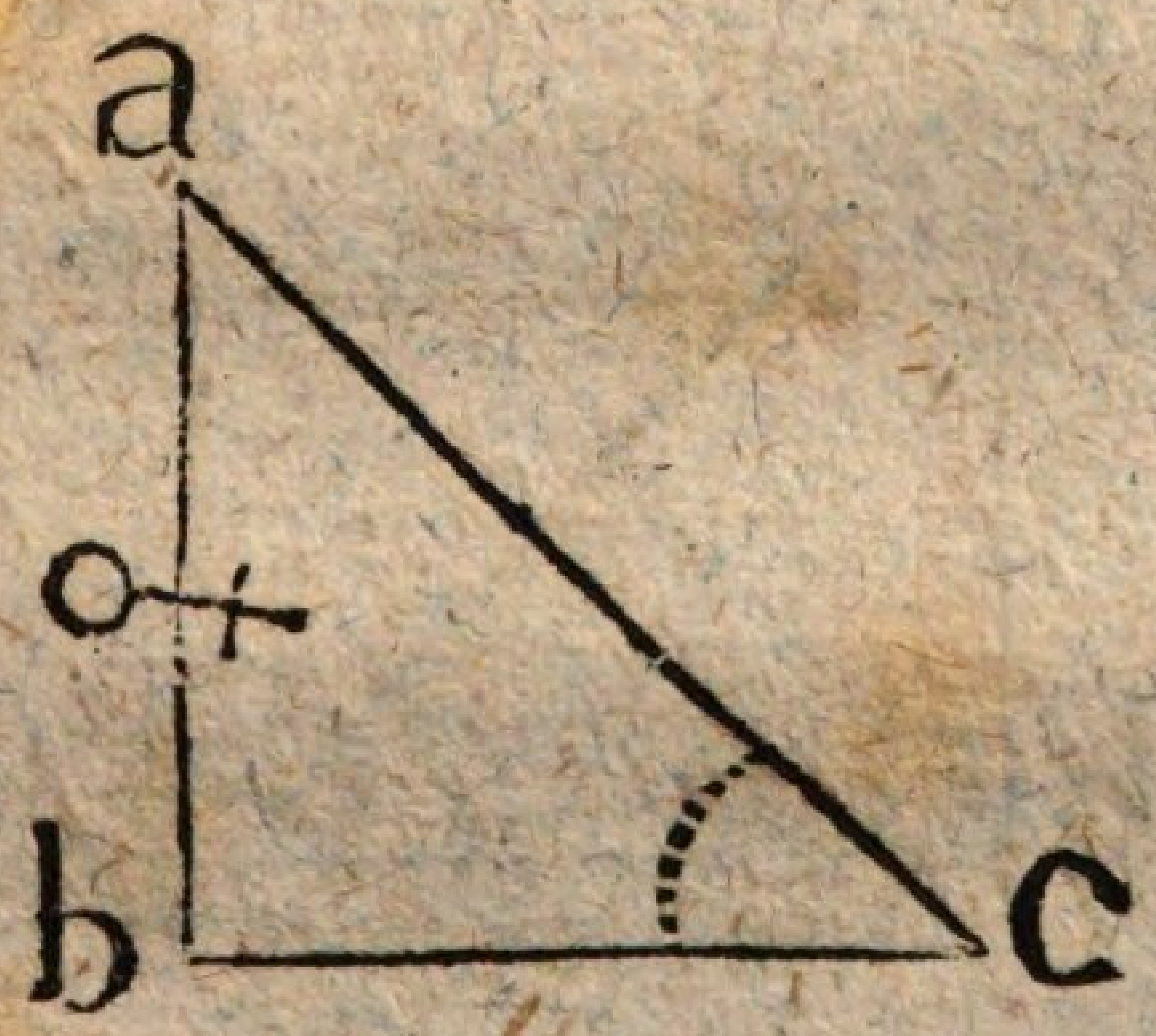
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungsregel.
ab	$\angle c$	ac : ab $=$ R : Sin. c
und	$\angle a$	$90° - \angle c$ oder ac : ab $=$ R : Cos. a.
ac	die Seite bc	log. bc $= \frac{1}{2}$ log. (ac $+$ ab) $+$ $\frac{1}{2}$ log. (ac $-$ ab)



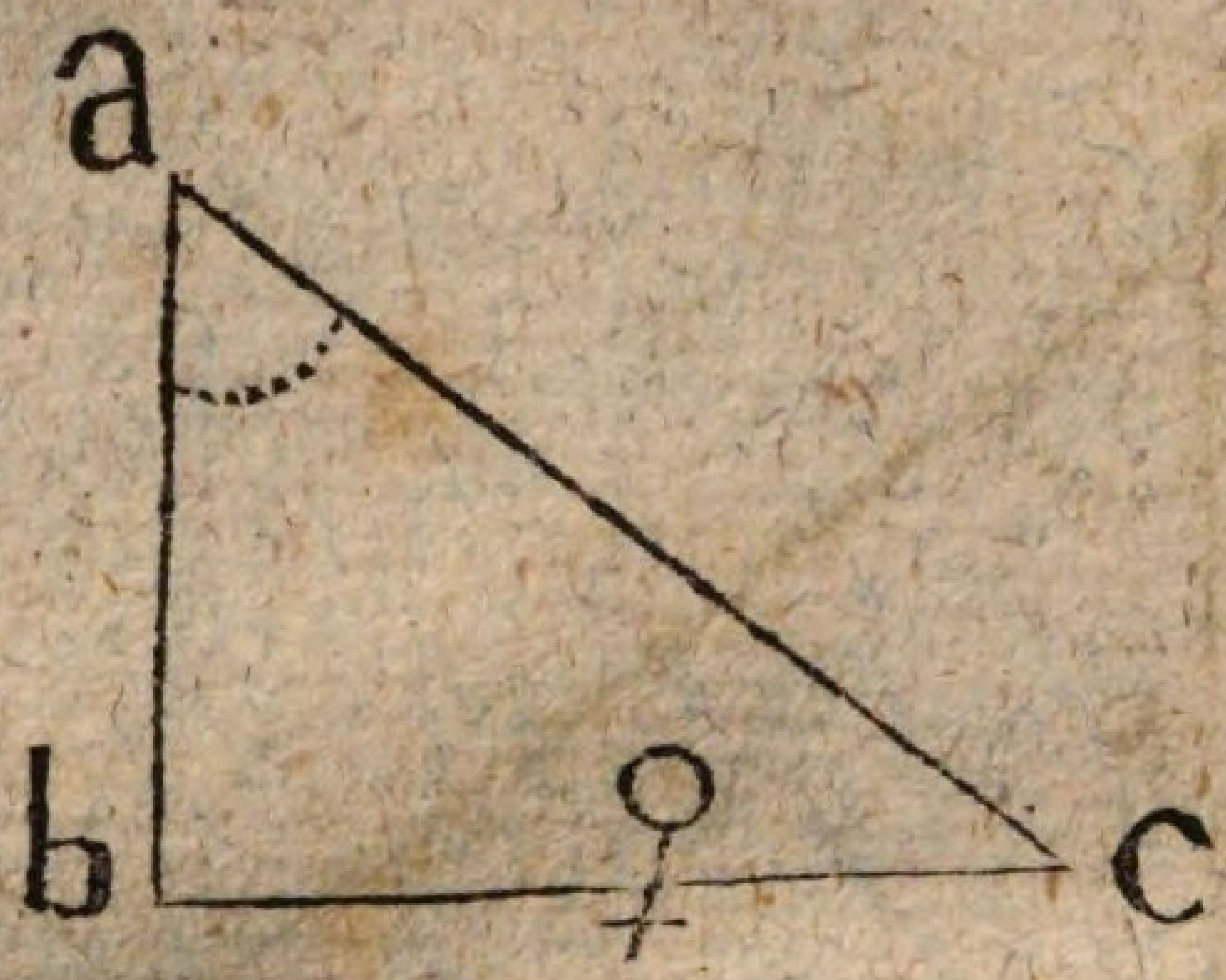
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungsregel.
ac	die Seite ab	$\log. ab = \frac{1}{2} \log. (ac + bc) + \frac{1}{2} \log. (ac - bc)$
und	$\angle a$	$ac : R = bc : \text{Sin. } a$
bc	$\angle c$	$ac : bc = R : \text{Cos. } c$



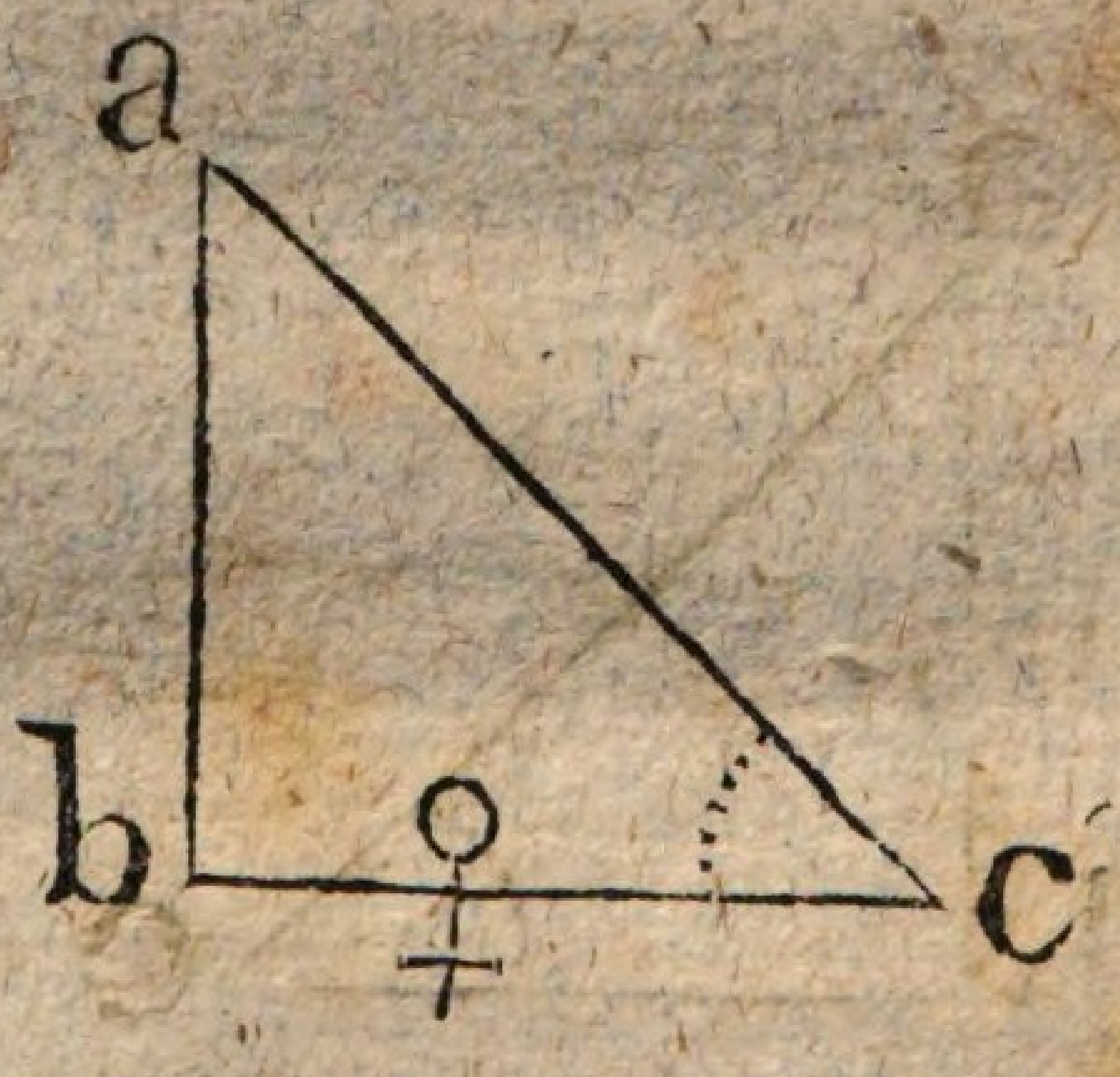
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungs-regel.
ab und ∠a	bc	R : Tang. a = ab : bc
	ac	Cos. a : R = ab : ac



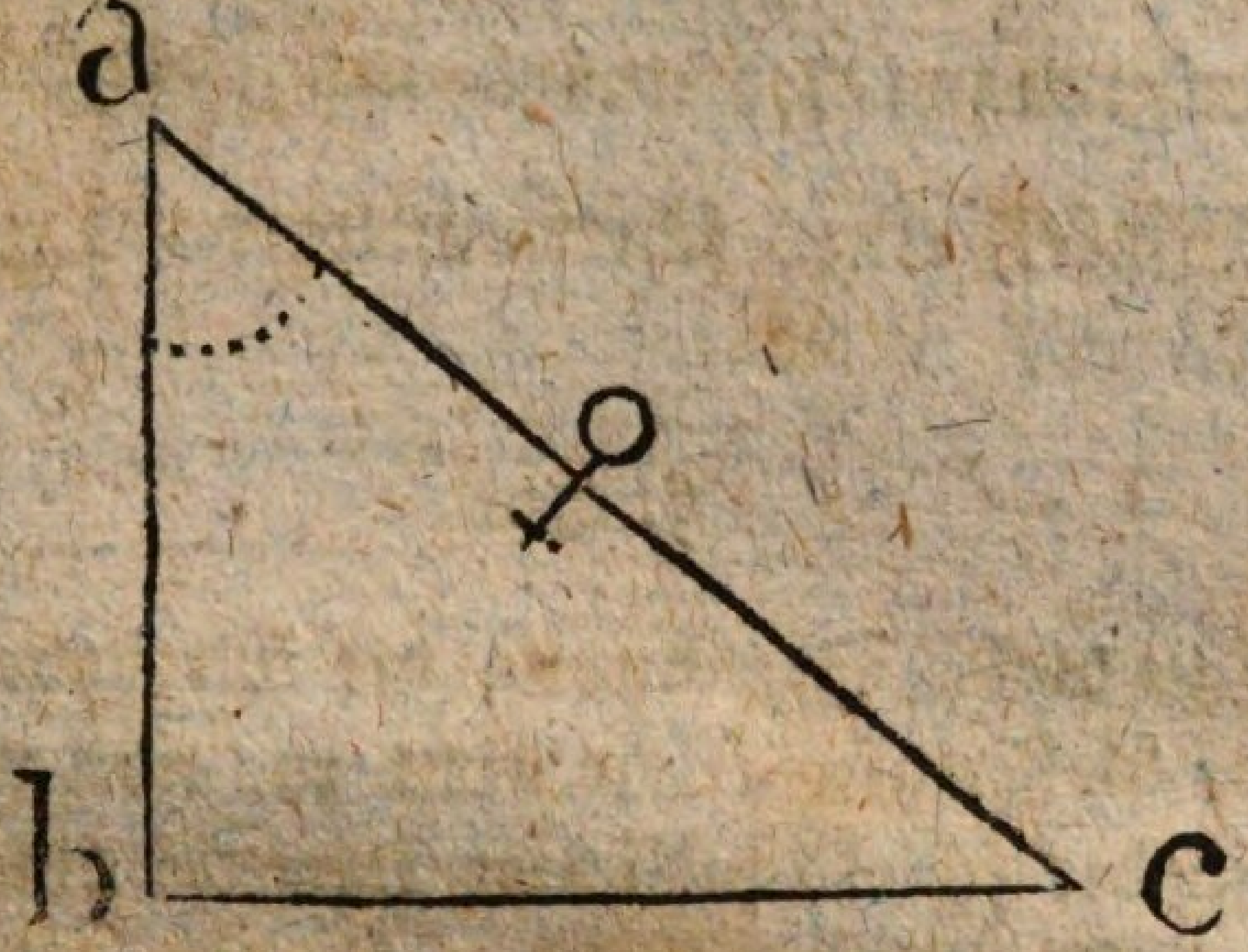
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungs-regel.
ab und ∠c	bc	Tang. c : R = ab : bc
	ac	Sin. c : ab = R : ac



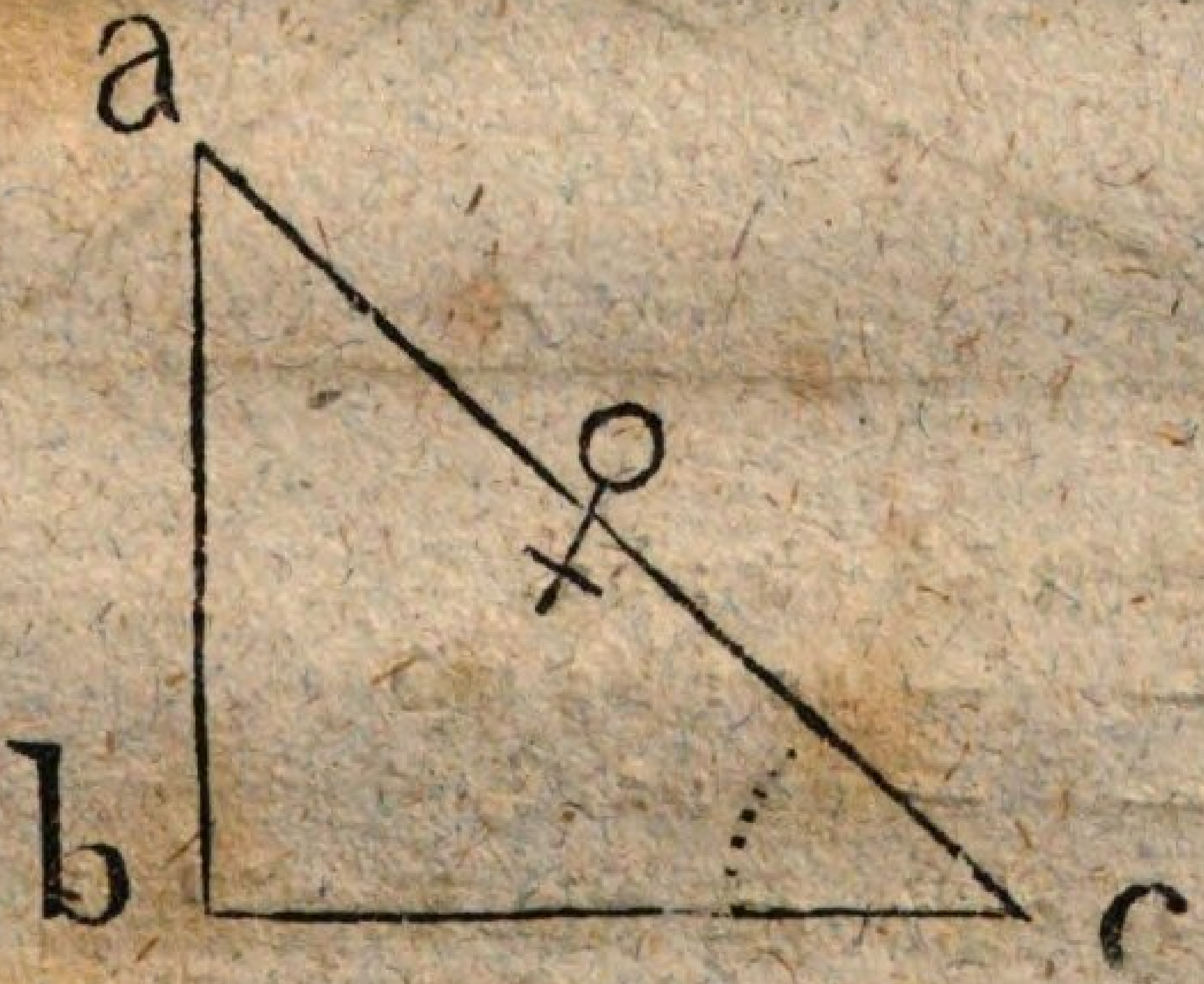
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungsregel.
bc und ∠a	ab	Tang. a : R = bc : ab
	ac	Sin. a : bc = R : ac



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
bc und ∠c	ab	R : Tang. c = bc : ab
	ac	Cos. c : R = bc : ac



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
ac und ∠a	ab	R : Cos. a = ac : ab
	bc	R : ac = Sin. a : bc



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
ac und ∠c	ab	R : ac = Sin. c : ab
	bc	R : Cos. c = ac : bc

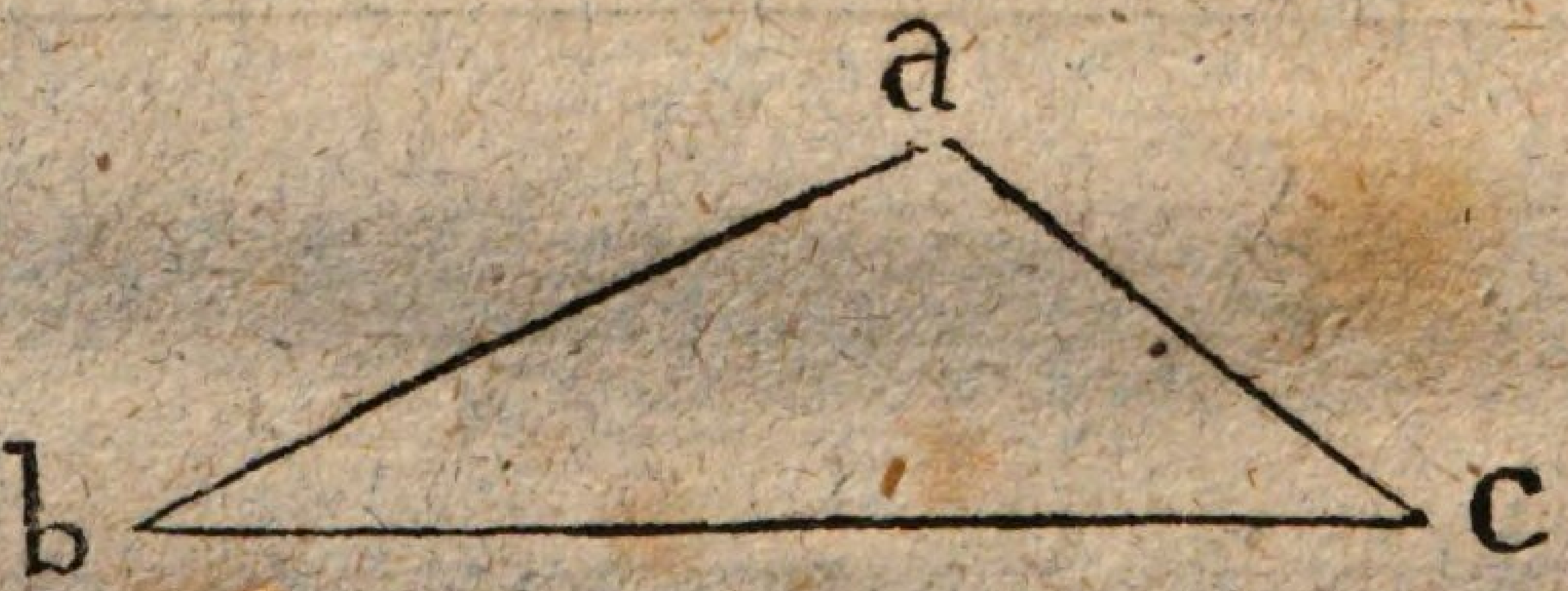
Die Berechnungen der unbekannten Stücke (Seiten und Winkel) eines schiefwinklichten Dreieckes.

§. 30.

Um zu dieser Berechnung die Methode zu finden, reichen die bisherigen Sätze nicht zu, weil wir nemlich die Seiten der schiefwinklichten Dreiecke nicht selbst als trigonometrische Linien ansehen können, wie das bei den rechtwinklichten der Fall war.

Wie verhalten sich denn die Seiten eines schiefwinklichten Dreieckes gegen einander? —

z. B.:



Wie verhält sich ab : bc,
— — — ac : bc und
— — — ab : ac?

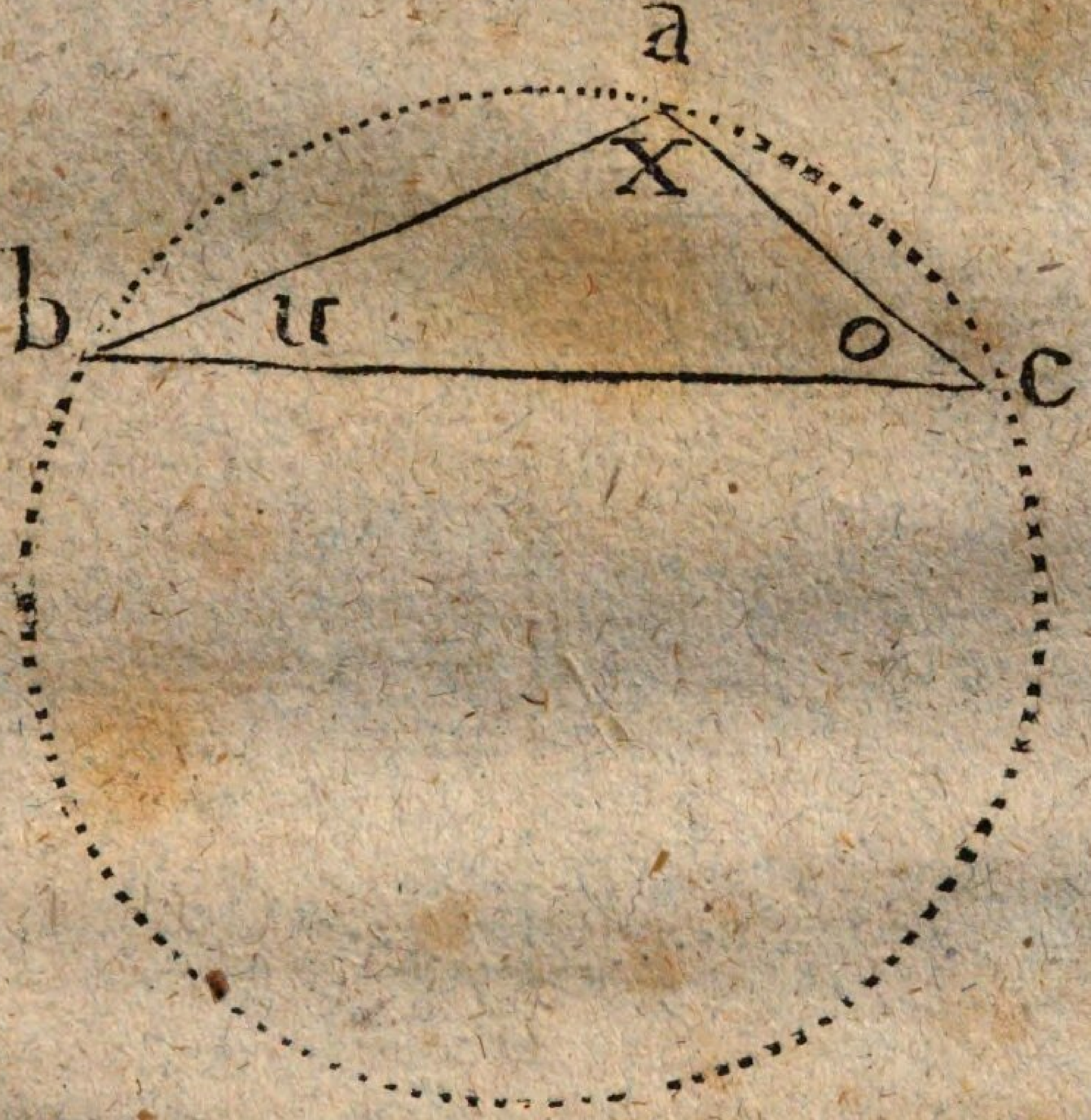
Weißt du denn gar kein Verhältniß anzugeben oder aufzufinden, wie wol die Seiten sich zu einander verhalten könnten?

Was thaten wir vorher bei den rechtwinklichten Dreiecken, um die Verhältnisse der Seiten zu den Radien, Sin., Tangenten ꝛc. zu erhalten?

Wir zogen Kreise.

Wenn wir nun dieses Mittel hier auch einmal anwandten, um zu sehen, wohin uns dies durch Folgerungen führt.

Also wir beschreiben nun durch die Spitzen des schiefwinklichten Dreieckes einen Kreis.



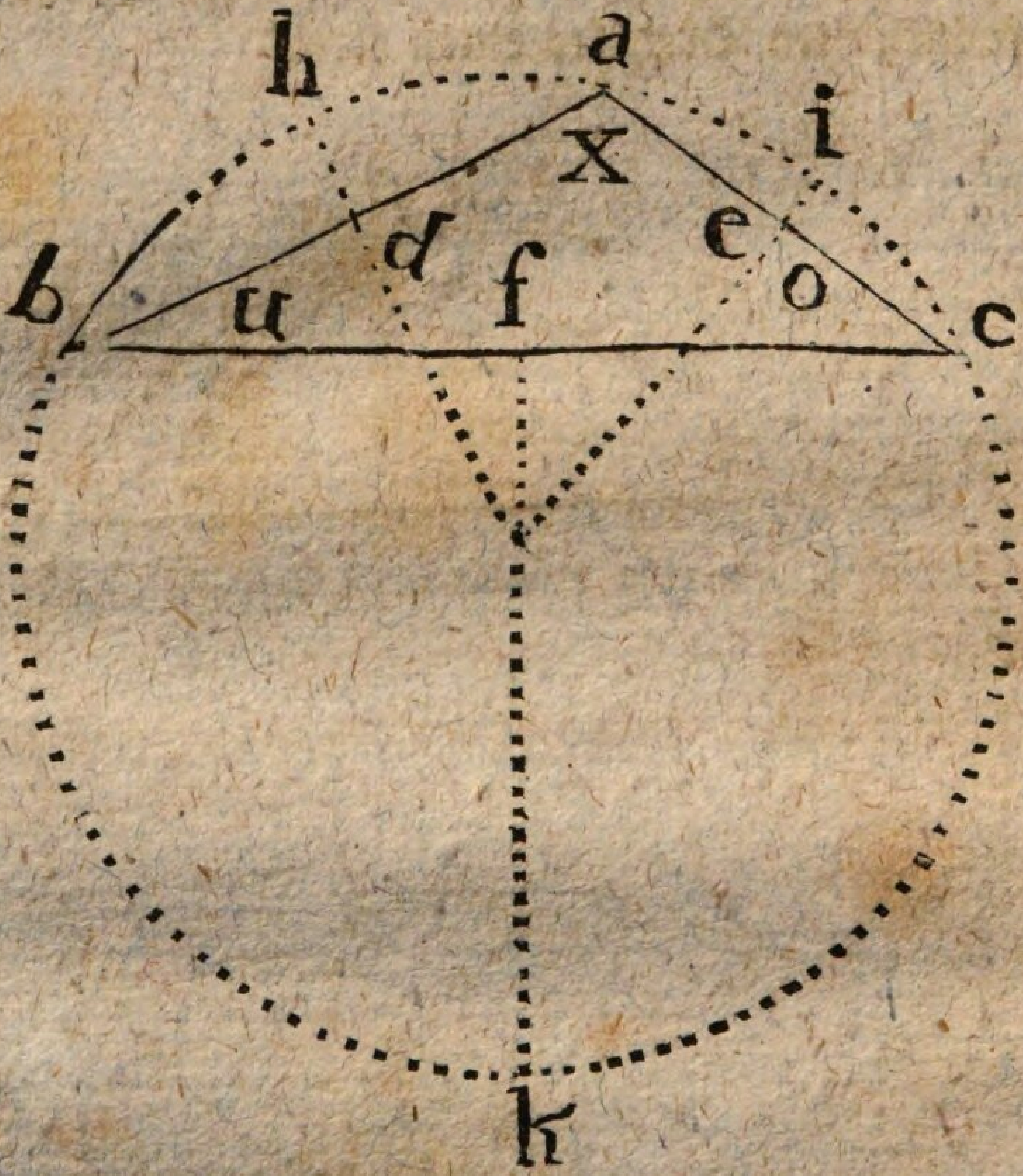
Was für Linien sind nun die Seiten des schiefwinklichten Dreieckes in Absicht auf den Kreis?

Die Seiten des Dreieckes sind nun Sehnen des Kreises.

Und die Winkel des Dreieckes — weil sie in der Peripherie liegen — —?

Und die Winkel desselben sind Peripheriewinkel.

Wenn wir nun ferner aus dem Mittelpunkte des Kreises senkrechte Linien fallen lassen, auf die Seiten des Dreieckes, und diese bis an die Peripherie verlängern.



Wie zerlegen diese senkrechte Linien die Seiten?

Diese senkrechte Linien halbiren die Seiten des Dreieckes,

nemlich: ad = db,

bf = fc

und ae = ec.

Und wie zerlegen diese senkrechte Linien die Bögen der Sehnen?

Auch die Bögen werden dadurch in 2 gleiche Theile zerlegt, nemlich:

ah = bh,

ai = ic,

und bk = ck.

Von welchen Winkeln sind nun diese halben Bögen die Maaße?

Diese halben Bögen sind nun die Maaße der Peripheriewinkel oder der Winkel des Dreieckes nach Gründen der Geometrie.

Was für eine Linie ist aber die halbe Sehne ad in Absicht des gegenüberliegenden Winkels o?

ad ist der Sin. des gegenüberliegenden Winkels o.

Und bf in Absicht des Winkels x?

Wie können wir nun schließen, da sich nach einem bekannten Satze in der Arithmetik: die Ganzen verhalten wie ihre Hälften?

ab : bc = ad : bf

ad = Sin. o; bf = Sin. x

---

folglich ab : bc = Sin. o : Sin. x

d. h.:

Diese beiden Seiten des schiefwinklichten Dreieckes verhalten sich, wie die Sin. der gegenüber liegenden Winkel.

Und endlich ab : ac = ad : ae

ad = Sin. o; ae = Sin. u

---

folglich ab : ac = Sin. o : Sin. u.

Und also endlich auch diese beiden letztgenannten Seiten des schiefwinklichten Dreieckes verhalten sich, wie die Sin. des gegen über liegenden Winkels.

Welches Verhältniß haben wir nun, durch Anwendung bekannter Sätze gefunden, wie verhalten sich die Seiten eines jeden schiefwinklichten Dreieckes zu einander?

Die Seiten eines jeden schiefwinklichten Dreieckes verhalten sich allemal, wie die Sin. der gegenüber liegenden Winkel.

§. 31.

Oder wenn wir diesen Satz noch auf eine andere Weise untersuchen.

Wir lassen nemlich von der Spitze des gegebenen Dreieckes eine senkrechte Linie auf die Grundlinie oder auf die verlängerte Grundlinie fallen.

z. B.:

Fig. A.

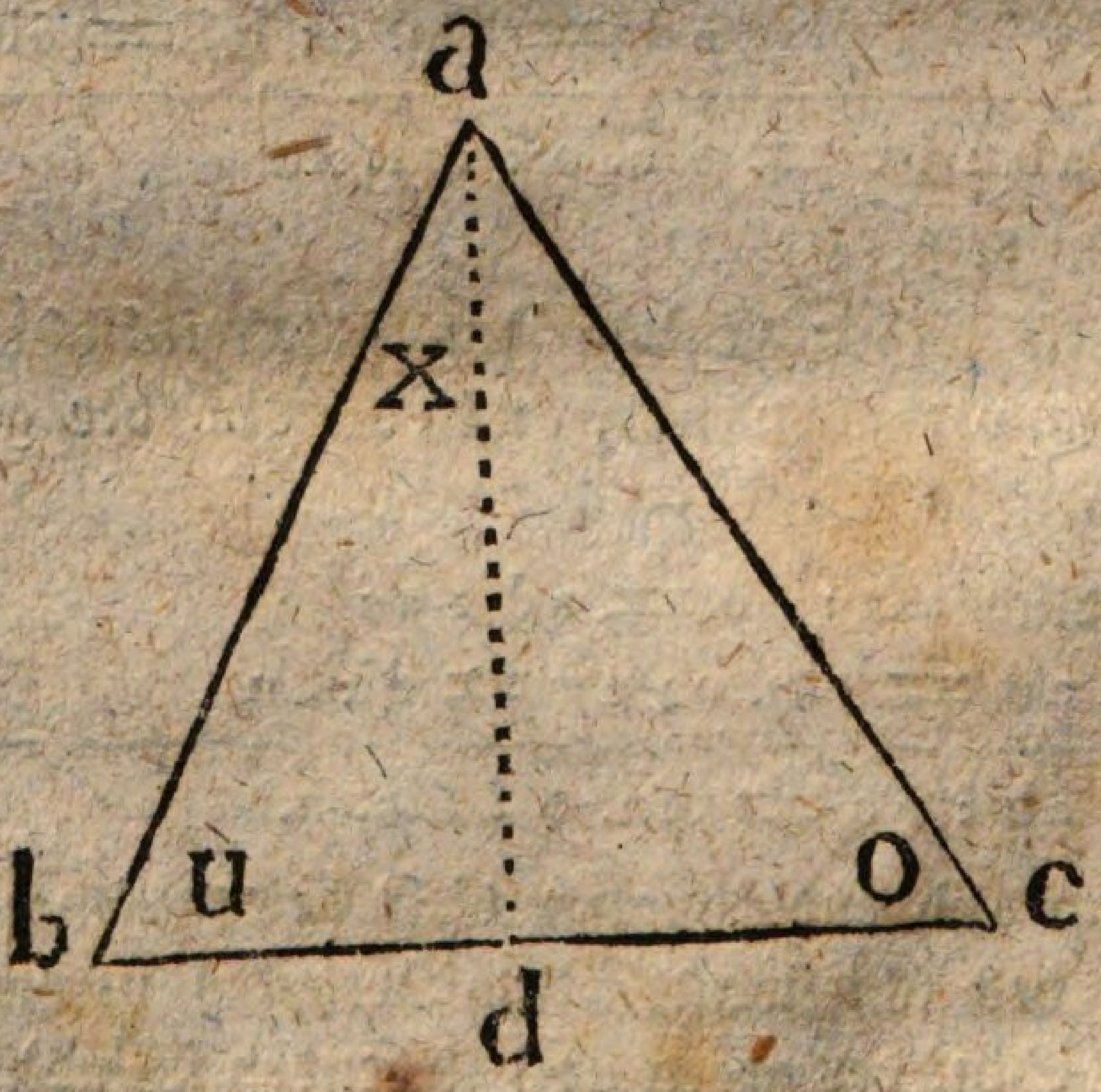
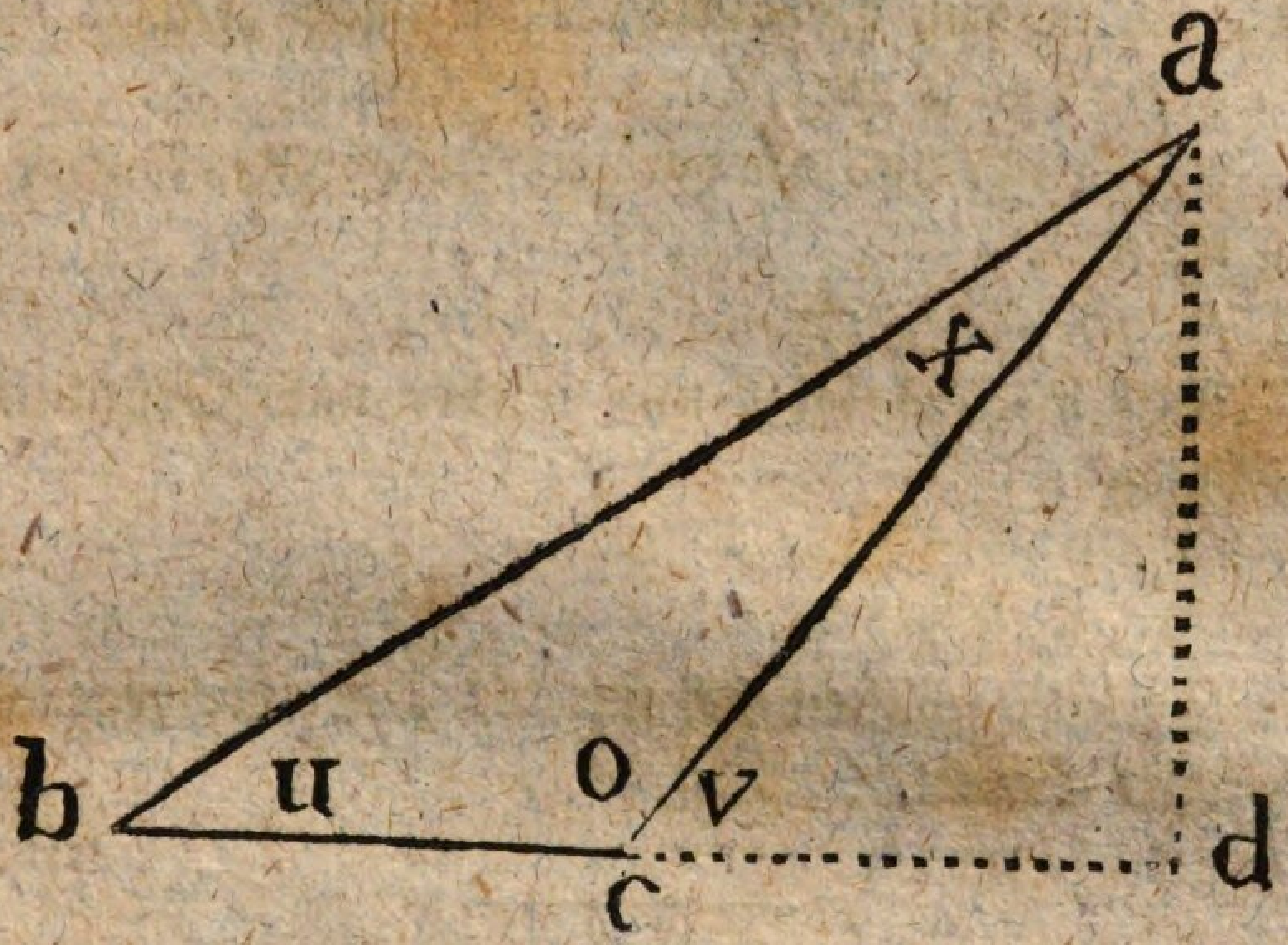


Fig. B.



Wenn wir uns nun in Fig. A. mit der Linie ab aus b einen Kreis beschrieben gedenken; was für eine Linie wird ab denn in Absicht des Kreises?

Und ad — —?

Wie können wir nun schließen?

ab : ad = Sin. tot. : Sin. u.

Dies ist nun eine geometrische Proportion, wie verhält sich nun in einer solchen, das Produkt des 1sten und 4ten Gliedes?

Das Produkt des 1sten und 4ten Gliedes ist gleich dem Produkte des 2ten und 3ten Gliedes.

Also hier:

I. ab × Sin. u = ad × Radius.

Oder wir gedenken uns in Fig. A. mit ac aus c einen Kreis beschrieben; was für eine Linie wird ac denn in Absicht des Kreises?

Und ad — —?

Wie können wir nun schließen?

ac : ad = Rad : Sin. o.

Also weil das Produkt des 1sten und 4ten Gliedes gleich ist dem Produkte des 2ten und 3ten.

II. $ac \times \text{Sin. } o = ad \times R.$

Aus dieser und der vorigen Proportion können wir nun folgern:

III. $ab \times \text{Sin. } u = ac \times \text{Sin. } o.$

Und hieraus folgt nun wieder nach Gründen der Arithmetik:

IV. $ab : ac = \text{Sin. } o : \text{Sin. } u.$

d. h.:

Die Seiten verhalten sich wie die Sin. der gegenüberliegenden Winkel.

Im 2ten Fall aber, s. Fig. B., wenn das Dreieck ein stumpfwinklichtes ist, und die senkrechte Linie also auf die verlängerte Grundlinie fällt, so schließen wir eben so:

I. $ab : ad = R : \text{Sin. } u.$

$ab \times \text{Sin. } u = ad \times R.$

$ac : ad = R : \text{Sin. } v.$

II. $ac \times \text{Sin. } v = ad \times R.$

III. $ab \times \text{Sin. } u = ac \times \text{Sin. } v.$

IV. $ab : ac = \text{Sin. } v : \text{Sin. } u.$

Auf gleiche Weise werden die übrigen drei oben angeführten Proportionen hergeleitet, und also ist der Satz in allen Fällen bewiesen und wahr.

Hieraus erhellet also nun deutlich, wie man sowol von den Seiten eines schiefwinklichten Dreieckes auf die Sin. der gegenüberstehenden Winkel in demselben,

und mithin auf die Winkel selbst, als auch umgekehrt von den Sin. der Winkel eines Dreieckes auf die Länge der gegenüberstehenden Seiten schließen kann.

Unmittelbar können durch eben diese Schlüsse in gewissen Fällen, aus drei gegebenen Stücken eines Dreieckes die übrigen gefunden werden.

§. 32.

Nun wollen wir die, in dem ebenvorhergehenden §. gefundene Proportion hier bei dieser gezeichneten Figur anwenden, um zu sehen, ob wir auf diesem Wege nicht etwas, uns bis jetzt unbekanntes, finden.

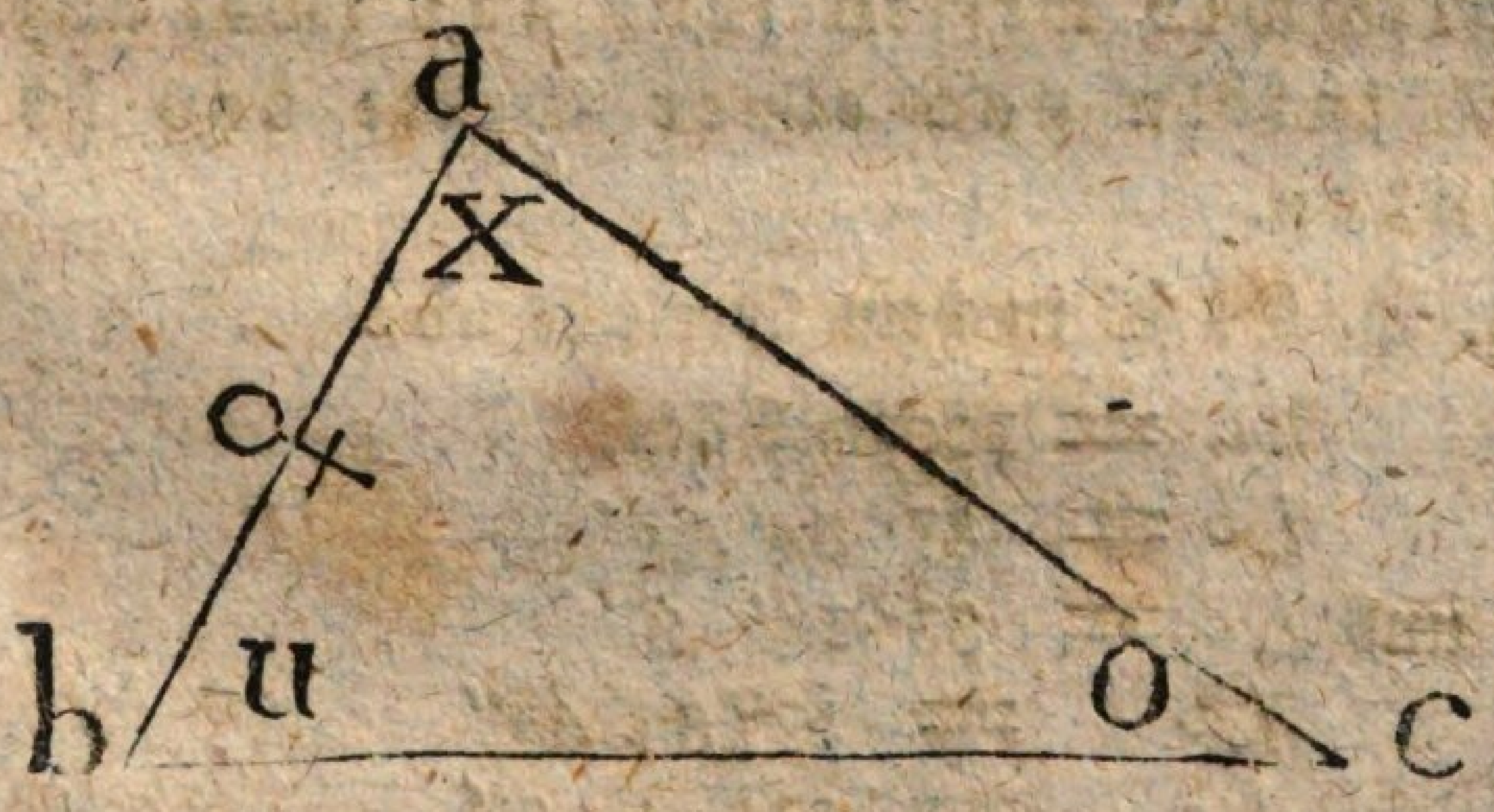
Es verhält sich:

ab : ac = Sin. o : Sin. u.

Nach Gründen der Arithmetik verhält sich auch das 3te Glied zum 1sten, wie das 4te zum 2ten.

Also hier:

Sin. o : ab = Sin. u : ac.



Nun bei dieser Figur angewandt:

Sin. o : ab = Sin. u : ac

oder auch:

Sin. o : Sin. u = ab : ac.

Bibliothek Passau

Um den Begriff nicht auf eine einzelne Anschauung zu beziehen, so wende diese Proportionen auch an auf einige der vorhergehenden Figuren.

Und wenn wir die Seite bc zuerst finden wollten; wie schließen wir denn?

Sin. x : Sin. o = ab : bc.

Jetzt allgemein ausgedruckt: es verhält sich der Sin., welcher der bekannten Seite gegenüber steht, zum Sin. des Winkels, welcher die unbekannte Seite gegen sich hat, wie die bekannte Seite zur unbekannten.

Aus welchen bekannten Stücken haben wir nun die unbekannten Seiten gefunden?

Aus den zwei bekannten Winkeln x und u nebst der Seite ab haben wir die nun bekannten Seiten gefunden.

Es fehlt uns nun noch die Größe des Winkels o.

Da uns x und u bekannt sind, wie finden wir den Winkel o?

Also wir wissen jetzt aus zwei gegebenen Winkeln und einer Seite das übrige zu finden.

z. B. Es sei in dem Dreiecke abc

bc = 10070 Ellen,
∠b = 57° 54′ 45″
und ∠c = 53° 14′ 3″

∠b	=	57° 54′ 45″
∠c	=	53° 14′ 3″
∠b + c	=	111° 8′ 48″
∠a + b + c	=	179° 59′ 60″
∠a	=	68° 51′ 12″

Sin. a : bc = Sin. b : ac

d. i. Sin. 68° 51′ 12″ : 10070 = Sin. 57° 54′ 45″ : ac

log. ac = log. 10070 + log. Sin. 57° 54′ 45″ — log. Sin. 68° 51′ 12″

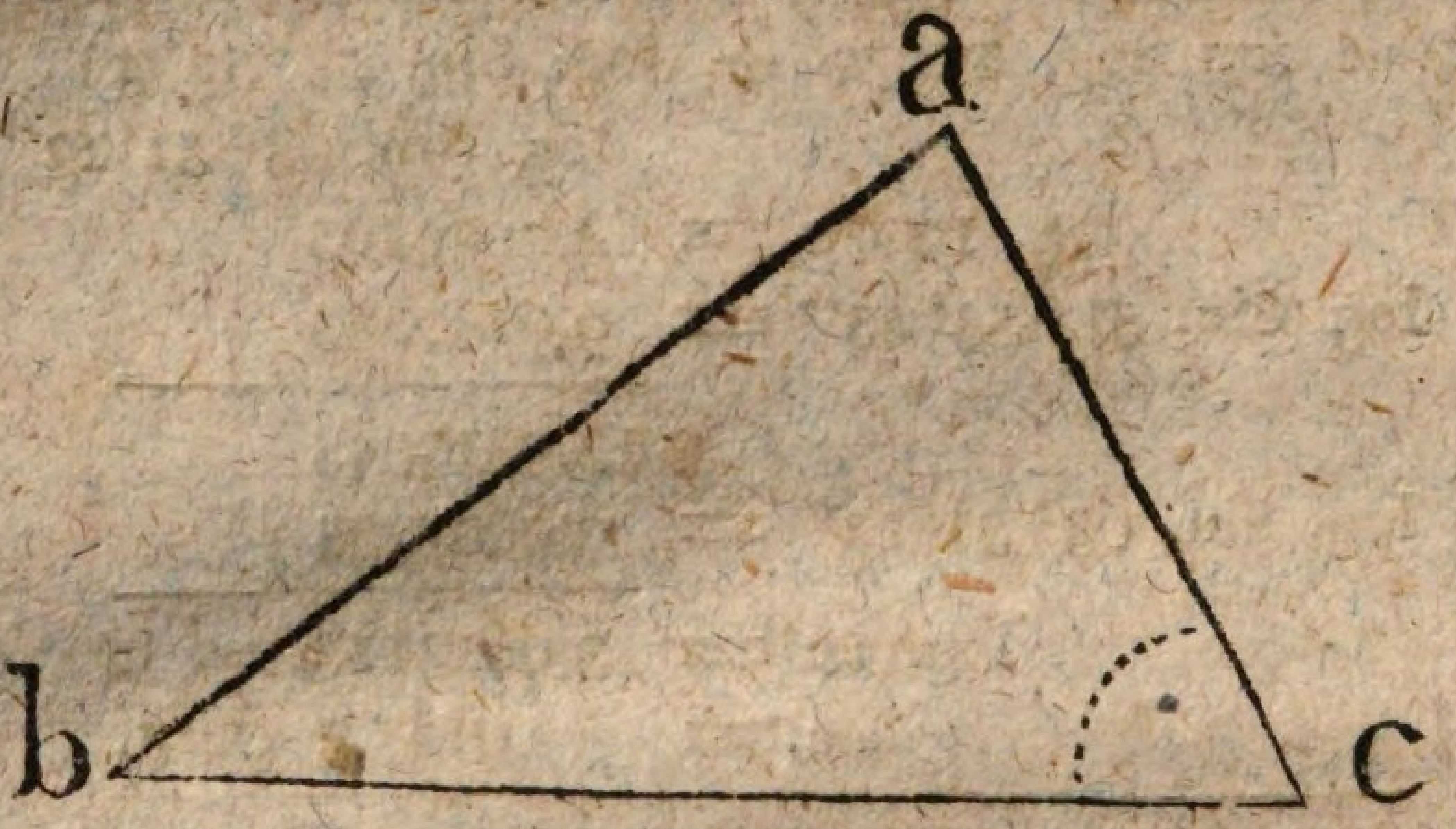
log. 10070	=	4,0030295
log. Sin. 57° 54′ 45″	=	9,9280053
		13,9310348
log. Sin. 68° 51′ 12″	=	9,9697233
log. ac	=	3,9613115
ac	=	9147,7 Ellen.

Sin. 68° 51′ 12″ : Ellen = Sin. 53° 14′ 3″ : ab

log. ab = log. 10070 + log. Sin. 53° 14′ 3″ — log. Sin. 68° 51′ 12″

log. 10070	=	4,0030295
log. Sin. 53° 14′ 3″	=	9,9036804
		13,9067099
log. Sin. 68° 51′ 12″	=	9,9697233
log. ab	=	3,9369866
ab	=	8649,4 Ellen.

§. 33.



Hier haben wir z. B. ein Dreieck abc vor uns. Gesetzt wir wüßten nun die Länge

der Seite ac, nemlich 1814′,
auch die Länge der Seite ab = 2345′
und die Größe von $\angle$ c = 49°

Könnten wir daraus wol die übrigen unbekannten Stücke, nemlich die beiden Winkel und die 3te Seite finden?

Den Winkel b kann ich durch folgenden Schluß erhalten:

ab : Sin. c = ac : Sin. b.

d. i.: 2345′ : Sin. 49° = 1814′ : Sin. b.

log. Sin. b = log. Sin. 49° + log. 1814′ — log. 2345′

log. Sin. 49°	=	9.8777799
log. 1814′	=	3.2586373
		13.1364172
log. 2345′	=	3.3701428
log. Sin. b	=	9.7662744.

Unter den Logarithmen der Sin. kömmt diesem Logarithmus am nächsten:

$$9.7662473 = \log. \text{Sin.}\ 35^\circ 43'$$

Dieser jetzt gefundene Winkel b liegt der kleinern Seite gegenüber; der bekannte $\angle c = 49^\circ$ liegt der größern Seite gegenüber.

Indem wir nun den Winkel b vermittelst der trigonometrischen Linien berechnet haben, finden wir eigentlich nur seinen Sin. Ein jeder Sin. gehört aber zu zweien Winkeln, einem spitzigen und einem stumpfen, die einander zu 180° ergänzen. Es ist also die Frage, welche von beiden sollen wir nehmen?

Bei der Beantwortung derselben kömmt es

1) darauf an: ob das Dreieck wirklich construirt ist; ob wir das Bild desselben vor uns haben. In diesem Fall wird jeder es leicht in der Figur sehen, ob der gesuchte Winkel ein spitziger oder stumpfer ist. Ist das erstere, so zeigen die Graden und Minuten in den Tabellen die Größe desselben an.

Ist aber das letztere: ist nemlich der Winkel stumpf, so muß der gefundene erst von 180° subtrahirt werden, und dies giebt denn die Größe des verlangten Winkels.

2) Wenn die bekannten Stücke nur zu ihrer Bestimmung gegeben sind; ohne daß man das Bild des Dreieckes vor sich sieht, ohne daß die Figur in der Wirklichkeit da ist: so muß auch durchaus angezeigt werden, ob der gegebene Winkel der längern oder kürzern Seite gegenüber steht. Liegt er der längern Seite gegenüber, so bestimmen diese Stücke nur ein einziges Dreieck; ist aber das zweite der Fall: liegt der gegebene Winkel der kürzern gegebenen Seite gegenüber:

so sind bisweilen zwei Dreiecke, bisweilen auch nicht ein einziges möglich.

$$\begin{array}{rl} \text{Also } \angle b & = 35^\circ 43' \\ \angle c & = 49^\circ \\ \hline \angle b + c & = 84^\circ 43' \\ \angle a + b + c & = 180^\circ \\ \hline \angle a & = 95^\circ 17' \end{array}$$

Wie finden wir hieraus die Seite bc?

Wir schließen:

$$\text{Sin. } c : ab = \text{Sin. } a : bc$$

d. i. $\text{Sin. } 49^\circ : 2345 = \text{Sin. } 95^\circ 17' : bc$

$$\log. bc = \log. 2345 + \log. \text{Sin. } 95^\circ 17 - \log. \text{Sin. } 49^\circ$$

$$\begin{array}{rr} \log. 2345 = & 3.3701428 \\ \log. \text{Sin. } 95^\circ 17' = \log. \text{Sin. } 84^\circ 43' = & 9.9981510 \\ \hline & 13.3682938 \\ \log. \text{Sin. } 49^\circ = & 9.8777799 \\ \hline \log. bc = & 3.4905139, \end{array}$$

welchem der Logarithmus der Zahl 3094 am nächsten kömmt. Die Seite bc beträgt also 3094 Fuß, oder 309 Ruthen 4 Fuß.

§. 34.

In dem eben vorhergehenden §phen haben wir gelernt aus zwei gegebenen Seiten und dem Winkel, welcher der größern Seite gegenüber steht, die übrigen beiden Winkel, und die dritte Seite zu finden.

Wie aber, wenn der gegebene Winkel nicht der größern, sondern der kleinern Seite gegenüber steht, können wir denn auch daraus das Uebrige finden? —

Dies wollen wir jetzt untersuchen.

Also was ist uns bekannt?

Und was wollen wir daraus suchen?

Z. B. s. Fig. in dem eben erwähnten Falle.

Es sei der Winkel, welcher der kleinern Seite ac gegenüber steht = 32°,

ac = 1171

und ab = 2202;

Wie würden wir nun schließen müssen, um den ∠c zu finden?

ac : Sin. b = ab : Sin. c

d. i.: 1711 : Sin. 32° = 2202 : Sin. c

log. Sin. c = log. Sin. 32° + log. 2202 — log. 1711

log. Sin. 32° = 9.7242097
log. 2202 = 3.3428173

13.0670270

log. 1711 = 3.2332500

log. Sin. c = 9.8337770.

Welchem Logarithmus in den Sinus-Tabellen kömmt dieser Logarithmus nun am nächsten?

Dem, zu dem Sin. eines Winkels von 43°.

Also ein spitziger Winkel —; aber zu welchem Winkel ist er auch der Sin.?

Zu dem stumpfen Winkel von 180° — 43° = 137°.

Welchen Winkel soll ich nun nehmen? — —

Weil er der größern Seite ab gegenüber stehen soll, was kann ich mit Gewißheit behaupten, wenn ich ihn mit dem gegebenen Winkel vergleiche, welcher der kleinern Seite gegenüber ist?

Weil er der größern Seite gegenüber stehen soll, so muß er auch größer seyn, als der gegebene Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüber ist; also größer als 32°.

Aber der spitzige von 43° sowol, als der stumpfe von 137° sind beide größer, als 32°.

Auch macht die Summe der beiden Winkel noch nicht 180° aus.

Was können wir also nicht mit Gewißheit bestimmen, wenn zwei Seiten und ein anliegender Winkel, welcher der kleinern Seite gegenüber steht, gegeben werden?

Wir können also nicht rc.

Aber an unserer vorliegenden Figur können wir ja sehen, daß der Winkel c kein stumpfer Winkel seyn kann.

Gut — in diesem Falle, wo das Dreieck wirklich construirt ist, wo wir es schon vor uns haben.

Aber, wie wenn das Dreieck nicht schon gezeichnet ist, wenn bloß die nöthigen Stücke gegeben sind?

§. 35.

Wir wollen jetzt einmal 2 verschiedene Größen annehmen: $a > b$, und diese addiren $a + b = s$, nemlich die Summe.

Wenn wir nun aber diese verschiedenen Größen von einander subtrahiren; was erhalten wir denn?

So erhalten wir die Differenz $a - b = d$. (Differenz.)

Nehmen wir nun diese beiden Gleichungen, und wenden den Grundsatz: „Gleiches zu Gleichem giebt Gleiches" an, nemlich:

$$\begin{array}{l} a + b = s \\ a - b = d \\ \hline 2a = s + d \end{array}$$

d. h.:

Die größte von zwei verschiedenen Größen doppelt ist gleich der Summe und der Differenz derselben zusammen genommen.

Was folgt nun hieraus: wie groß muß also allemal die größte von zwei verschiedenen Größen seyn? —

$$\begin{array}{l} 2a = s + d \\ \hline \end{array}$$

folglich $a = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d$.

Die größte von zwei verschiedenen Größen muß also allemal gleich seyn der halben Summe und der halben Differenz derselben zusammen genommen,

oder:

Es sei z. B. die größte von zwei ungleichen Größen

$$a = 8$$

und die kleinste $b = 2$;

wie groß ist denn ihre Summe?

$$a + b = s = 10.$$

Und ihre Differenz —?

$$a - b = d = 6.$$

Wie groß ist nun ihre größere Größe?

$$a = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}d = \frac{10}{2} + \frac{6}{2} = 5 + 3 = 8.$$

Dagegen wenn wir den Grundsatz: „Gleiches von Gleichem giebt Gleiches" anwenden; was folgt denn daraus?

die Summe $s = a + b$

die Differenz $d = a - b$

$$\begin{array}{l} \hline s - d = 2b \end{array}$$

d. h.:

Wenn wir von der Summe zweier ungleichen Größen, ihren Unterschied abnehmen; so erhalten wir die kleinere Größe doppelt.

Was folgt nun hieraus wieder: wie erhalten wir die kleinere Größe?

$$s - d = 2b$$

folglich $\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d = b.$

Also die Hälfte der Summe weniger der halben Differenz ist gleich der kleinern Größen von zwei ungleichen.

Und nehmen wir wieder als Beispiel die vorigen angenommenen Zahlen.

$$a = 8$$
$$b = 2.$$

folglich $s = a + b = 10.$
$d = a - b = 6.$

$$b = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}d = \frac{10}{2} - \frac{6}{2} = 5 - 3 = 2.$$

Nun den Satz zusammen genommen, und allgemein ausgedruckt:

Wenn man zu der halben Summe zweier ungleichen Größen ihren halben Unterschied addirt, so erhält man die größere; und wenn man den halben Unterschied von der halben Summe subtrahirt: so erhält man die kleinere von diesen beiden Größen.

Weiß man also die Summe zweier Winkel und ihren Unterschied, wie kann man denn durch Hülfe dieses Satzes die Winkel selbst finden? —

Z. B. Es sei die Summe zweier Winkel

$a + b = 120^\circ$, und ihr Unterschied

$a - b = 30^\circ$;

wie groß ist denn der größte Winkel?

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2},$$

und nach unserm Beispiele:

$$a = \frac{120^\circ}{2} + \frac{30^\circ}{2} = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$$

für den größten der Winkel.

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2},$$

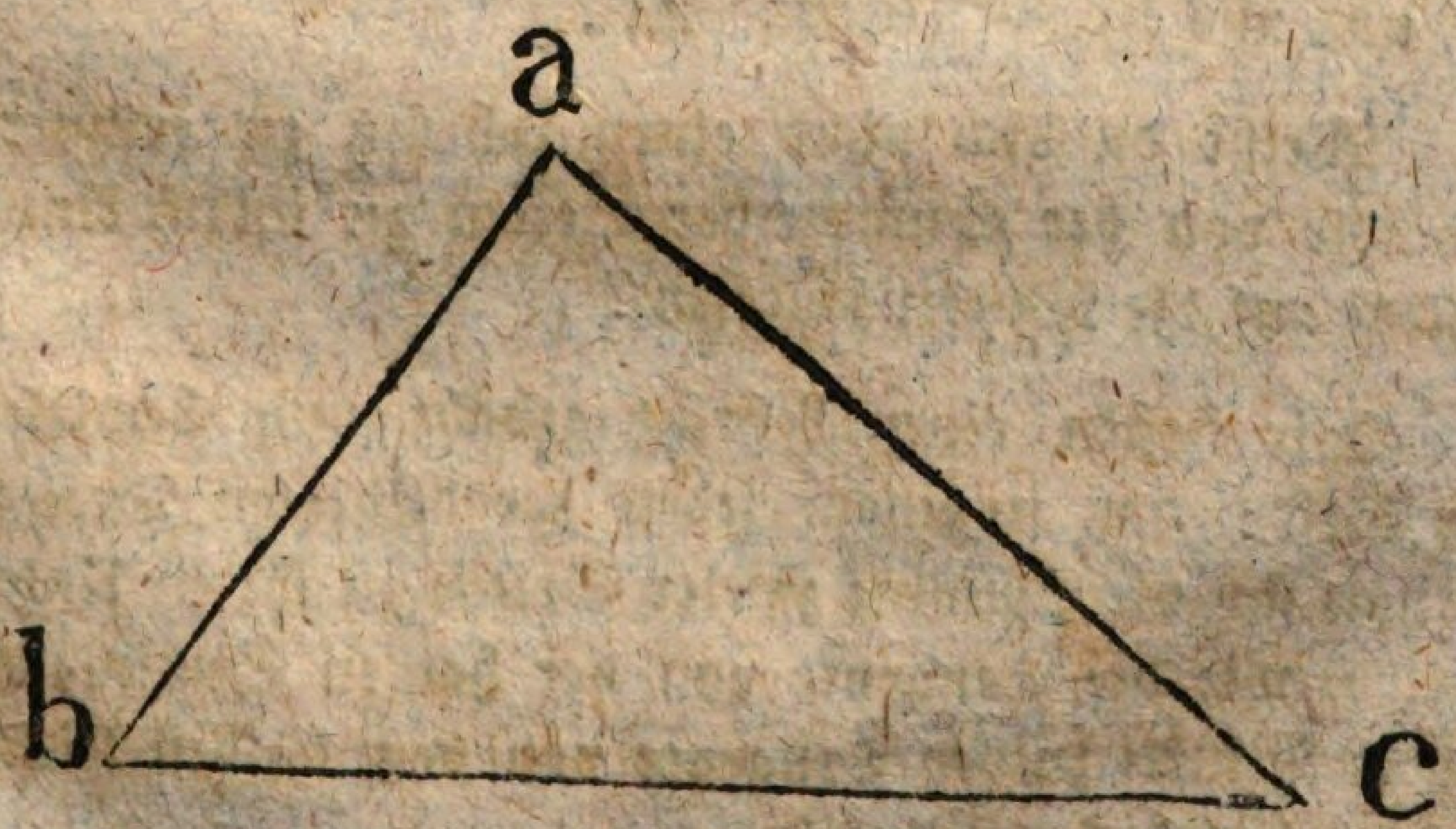
und nach unserm Beispiele:

$$b = \frac{120^\circ}{2} - \frac{30^\circ}{2} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$$

für den kleinsten der Winkel.

Diesen Satz: wenn wir zu der halben Summe zweier ungleichen Größen ihren halben Unterschied addiren ꝛc., wollen wir nun bei der folgenden Figur anwenden, um zu sehen, ob wir dadurch nicht auf etwas, uns bis jetzt noch unbekanntes kommen.

Es sei z. B. in diesem Dreiecke abc,



die Seite bc = 94′,
die Seite ab = 50′
und $\angle$ b = 56°.

Also bloß der Winkel bei b ist in dem Dreiecke bekannt; wie groß ist denn der Winkel bei a und der, bei c? —

Zusammen sind sie = 180° — 56° = 124°.

Aber jeder einzelne für sich — — —? —

Wir wissen also ihre Summe, folglich auch ihre halbe Summe; was fehlt uns nun noch — nach dem eben vorhergehenden Satze — um den größten oder kleinsten der beiden Winkel für sich zu erhalten?

Es fehlt uns noch der Unterschied derselben.

Wie finden wir nun diesen Unterschied? —

Denk' nur, was ist uns bekannt?

die Seite bc = 94′
und die Seite ab = 50′

folglich bc + ab = 144′
und also bc — ab = 44′.

Weißt du dich nicht einen Lehrsatz zu erinnern, wo wir von der Summe der Seiten zu ihrem Unterschiede auf die Winkel schlossen?

Wir haben einen Lehrsatz gehabt und bewiesen, der hieß: daß in einem jeden geradlinigten Dreiecke verhält sich die Summe zweier Seiten zu ihrem Unterschiede, wie die Tangente von der halben Summe der beiden Winkel zu der Tangente von dem halben Unterschiede eben dieser Winkel.

Dieß hier nun angewandt:

$$bc + ab : bc - ab = \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(bac + bca) : \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(bac - bca)$$

$$\text{d. i. } 144' : 44 = \frac{124^\circ}{2} : \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(bac - bca)$$

$$\log.\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(bac - bca) = \log.\ \text{Tang.}\frac{124^\circ}{2} + \log. 44 - \log. 144.$$

$$\log.\ \text{Tang.}\frac{124^\circ}{2} = 62^\circ = 10.2743256$$

$$\log. = 44 = 1.6434527$$

$$11\ 9177783$$

$$\log. 144 = 2.1583625$$

$$\log.\ \text{Tang.}\tfrac{1}{2}(bac - bca) = 9.7594158$$

nach den Logarithmen der Tabellen 29° 53′.
folglich muß der halbe Unterschied der beiden Winkel bac und bca = 29° 53 seyn.

Aber könnte es nicht ein stumpfer Winkel seyn?

Und warum nicht?

$$\tfrac{1}{2}(bac - bca) = 29^\circ 53'$$

$$bac = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ + 29^\circ 53' = 91^\circ 53'$$

für den größten der beiden Winkel.

$$bca = \frac{124^\circ}{2} = 62^\circ - 29^\circ 53' = 32^\circ 7'.$$

für den kleinsten der beiden Winkel.

Jetzt haben wir also die Größe von allen dreien Winkeln in dem Dreiecke.

2 Seiten des Dreieckes, nemlich: bc und ab waren gegeben.

Welches unbekannte Stück ist uns nun noch zu finden übrig?

Die Seite ac.

Wie finden wir nun wol die Seite? —

Erinnere dich nur, wenn wir durch eine Proportion die Seite finden sollen, womit müssen wir denn die Proportion anfangen?

Mit trigonometrischen Linien.

Mit welchen trigonometrischen Linien müssen wir hier denn beginnen, um die Seite ac zu erhalten?

$$\text{Sin. } bac : bc = \text{Sin. } abc : ac$$

d. i. $\text{Sin.} 91^\circ 53' : 94' = \text{Sin. } 56^\circ : ac$

$$\log. ac = \log. \text{Sin } 56^\circ + \log. 94 - \log. \text{Sin. } 91^\circ 53'$$

$$\log. \text{Sin. } 56^\circ = 9.9185742$$

$$\log. 94 = 1.9731278$$

$$11.8917020.$$

$$\log. \text{Sin. } 91^\circ 53' = 9.9997653$$

$$\log. ac = 1.8919367$$

nach den Tabellen 78'.

Jetzt haben wir alle unbekannte Stücke des Dreieckes gefunden.

Welche bekannte Stücke waren uns dazu gegeben?

2 Seiten und 1 Winkel.

Wo lag der Winkel in Absicht der beiden Seiten?

Der Winkel lag zwischen den gegebenen Seiten; er war von den Winkeln eingeschlossen.

Also wenn können wir also auch die unbekannten Stücke eines gegebenen Dreieckes finden?

Wenn uns zwei Seiten nebst dem Winkel, welchen diese Seiten einschließen, gegeben sind.

§. 36.

Sollten wir diese Aufgabe nicht noch auf eine andere Weise lösen können? —

Betrachte das letzte Dreieck noch einmal recht genau.

Was ist es für ein Dreieck, wenn wir auf die Winkel sehen?

Ein schiefwinklichtes Dreieck.

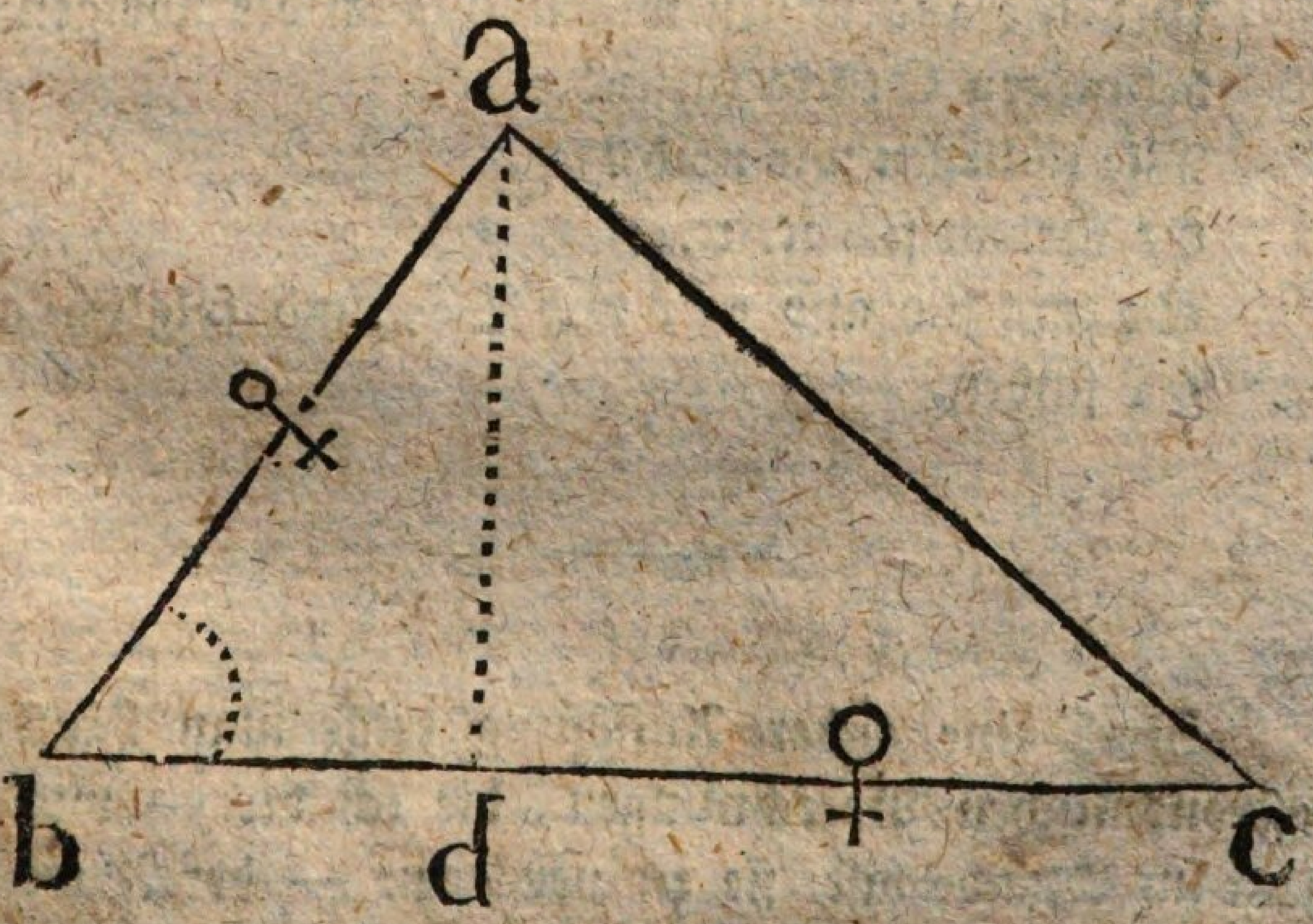
Wenn es ein rechtwinklichtes Dreieck wäre, so würden wir — nach dem vorhergehenden — leicht im Stande seyn, die Aufgabe zu lösen —; aber können wir es denn nicht in ein solches verwandeln?

Das wüßte ich nicht.

Oder in zwei rechtwinklichte Dreiecke.

Ja, wenn wir eine senkrechte Linie von der Spitze a auf die Grundlinie b c fallen lassen; so entstehen zwei rechtwinklichte Dreiecke,

z. B.



Hier sind also zwei rechtwinklichte Dreiecke, nemlich adb und adc.

Was ist nun von dem ersten rechtwinklichten Dreiecke adb bekannt?

Die Seite ab nebst dem Winkel bei b.

Nach dem Vorhergehenden wissen wir daraus die übrigen unbekannten Stücke zu finden. Wie schließen wir noch?

Sin. tot. : Sin. b = ab : ad.

Und wie muß die Proportion gestellt werden, um bd als viertes Glied zu erhalten?

Wie finden wir den dritten Winkel in dem Dreiecke?

So haben wir also alle unbekannten Stücke in dem ersten rechtwinklichten Dreiecke.

Was ist uns jetzt bekannt von dem zweiten rechtwinklichten Dreiecke?

Die Seite ad und dc, nemlich:

bc — bd = dc.

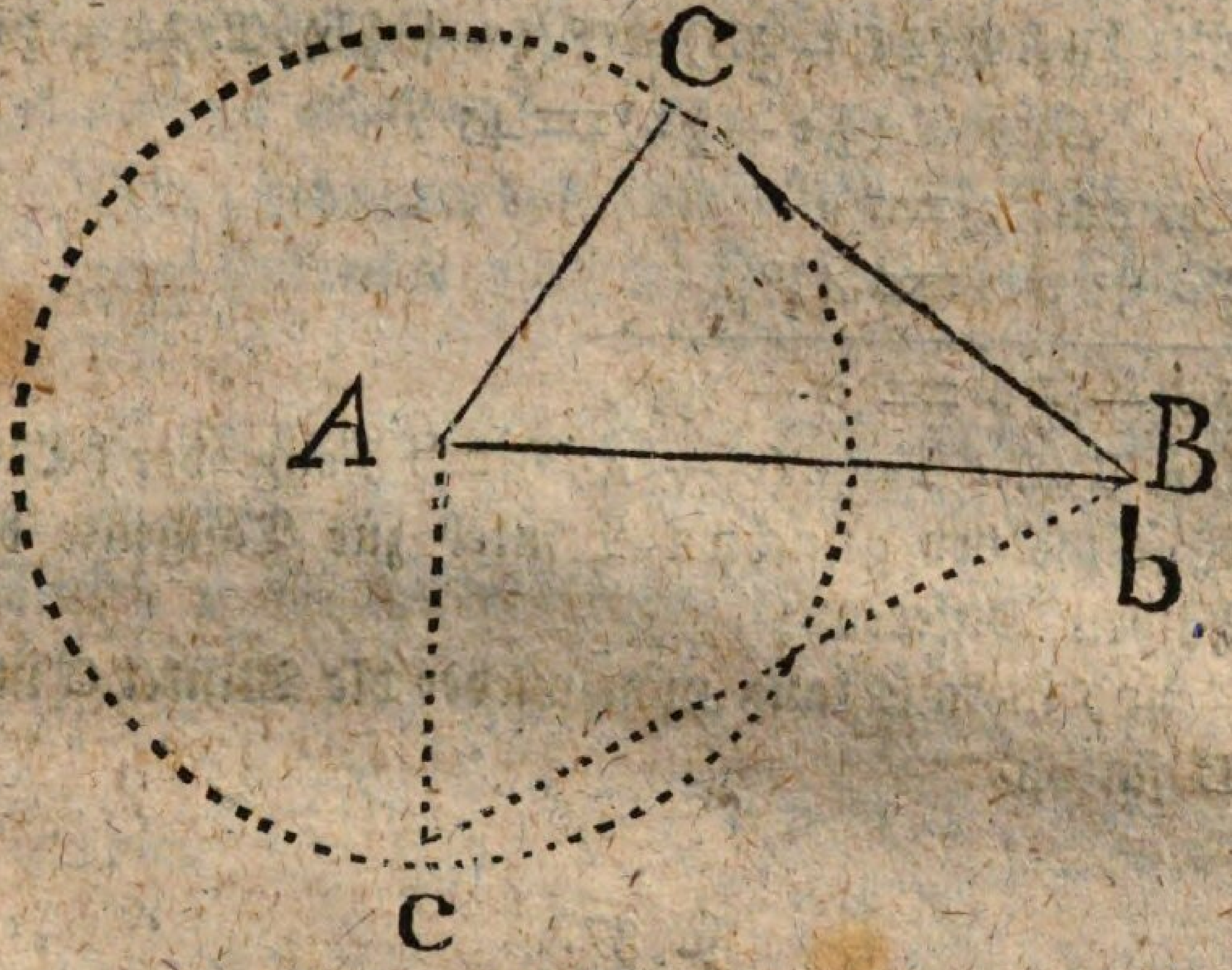
Und hieraus wissen wir nun auch die übrigen unbekannten Stücke zu finden.

Wie schließen wir noch?

Es verhält sich ꝛc. ꝛc.

So läßt sich also ac, und ∠c, und folglich auch ∠a finden.

Noch eine andere Auflösung trifft man häufig in astronomischen Berechnungen, die ich dir — weil du jetzt im Stande bist, sie zu verstehen — der Abwechselung wegen ununterbrochen geben will.



Wir beschrieben einen Kreis mit der kleinern gegebenen Seite, errichteten auf AB den senkrechten Halbmesser Ac und zogen Bc; daher

$$cAB = 90°,$$
$$c + b = 90°$$
und $\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}b = 45°$.

In den beiden Dreiecken ABC und Abc

ist $AB = Ab$,
und $Ac = AC$

folglich $AB + Ac = Ab + AC$,
und auch $AB - Ac = Ab - AC$.

Wir haben im Vorhergehenden bewiesen, daß sich verhält im Dreiecke ABC

$$AB + AC : AB - AC = T.(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}B) : T.(\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}B)$$

so auch im Dreiecke Abc:

$$Ab + Ac : Ab - Ac = T.(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b) : T.(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b)$$

folglich:

$$T.(\tfrac{1}{2}C + \tfrac{1}{2}B) : T.(\tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}B) = T.(\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b) : T.(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b)$$

Aber $T.(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b) = 45°$.

Da nun $c = c$

$\tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{2}b = 45°$

$\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}b = c - 45°$.

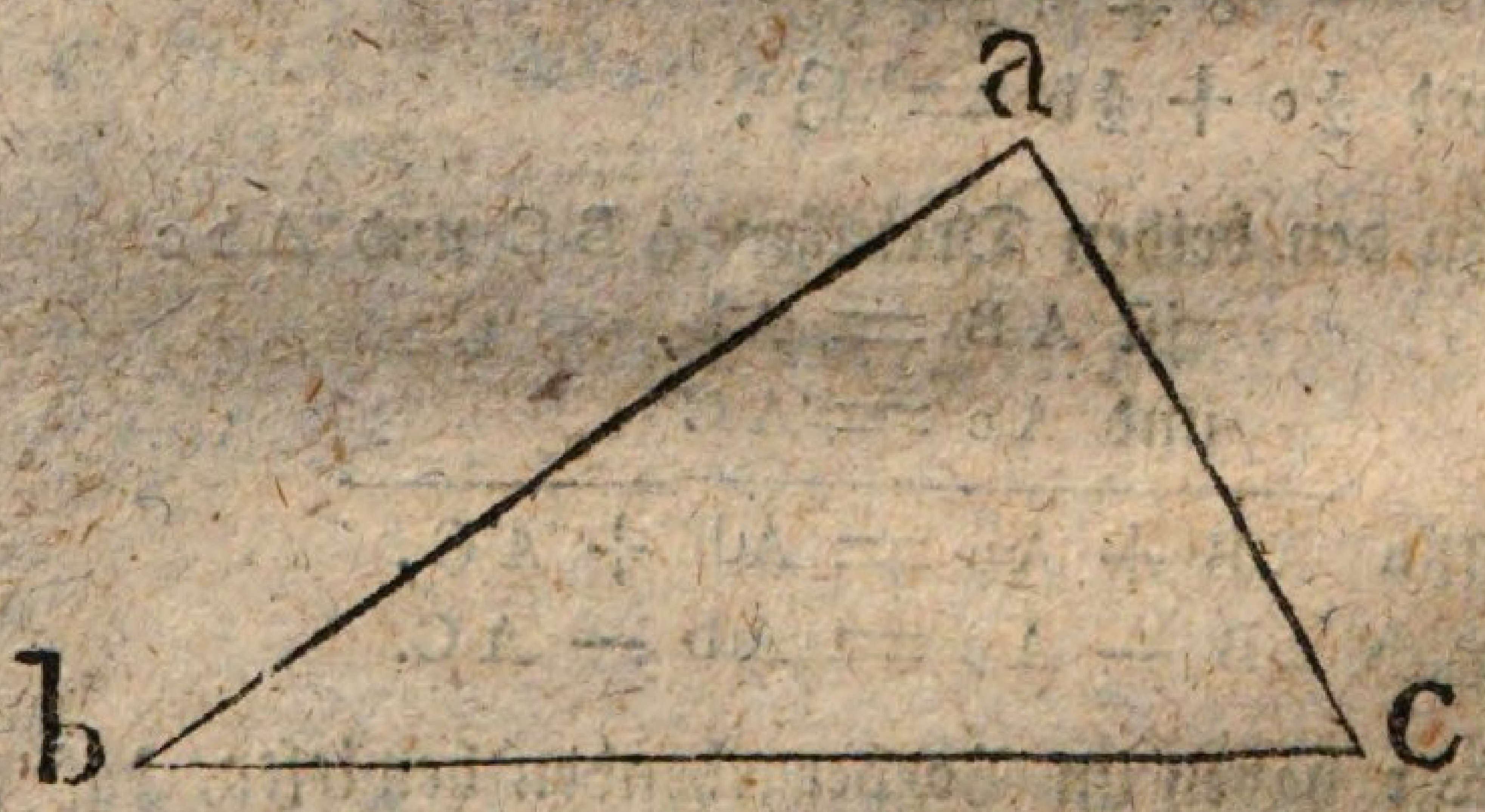
Sin. Tot. : Tang. $(c - 45°)$ = Tang. der halben Summe der gesuchten Winkel zur Tangente der halben Differenz;

und hieraus kann man wieder die Winkel C und B finden.

§. 37.

Wie aber, wenn uns die 3 Seiten des Dreieckes gegeben wären; könnten wir daraus die übrigen unbekannten Stücke, nemlich die 3 Winkel finden?

z. B.

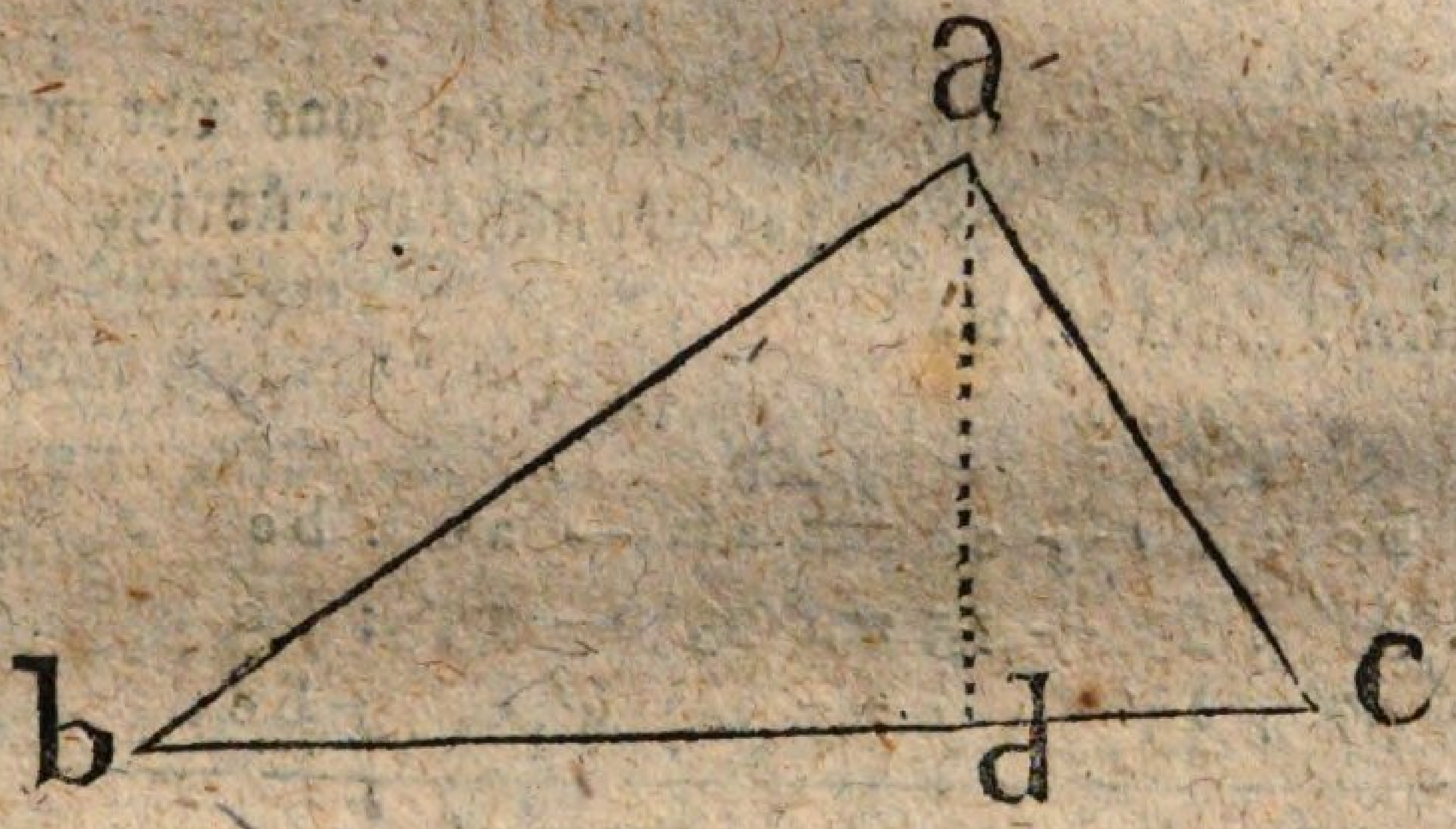


Es sey in dem Dreiecke abc
die Seite ab = 23',
die Seite bc = 36'
und die Seite ac = 15'.

Was thaten wir, um die unbekannten Stücke in dem schiefwinklichten Dreiecke des vorigen §phen, nach und nach zu erhalten?

Wir zertheilten das schiefwinklichte Dreieck; durch eine senkrechte Linie in zwei rechtwinklichte Dreiecke.

Wenn wir dies nun hier auch einmal versuchten, um zu sehen, ob wir auf diesem Wege nicht erst einen Winkel, z. B. ∠c finden könnten.



Was ist uns in dem rechtwinklichten Dreiecke adc bekannt?

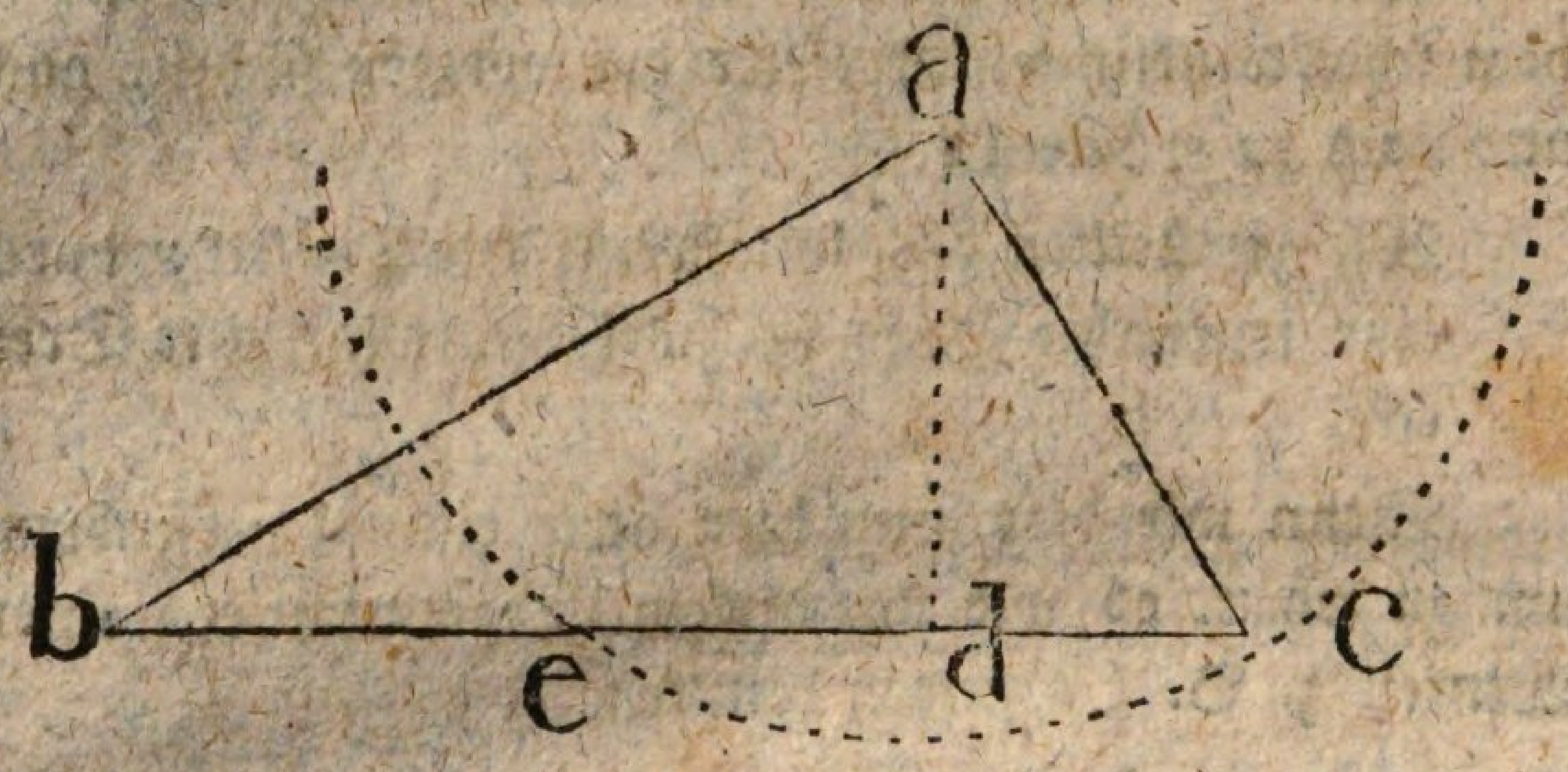
Die Seite ac und ∠d.

Ist dies hinlänglich, um die andern unbekannten Stücke in dem Dreiecke zu erhalten?

Nein, dies ist nicht genug; wir müßten noch die Größe eines Winkels oder einer Seite wissen.

z. B. die Seite dc.

Um die Seite dc zu erhalten, beschreibe man mit der kleinsten Seite ac einen Kreis, und suche zuerst den Theil von der Seite bc, welcher außerhalb der Peripherie liegt, nemlich: be.



Wie verhält sich nun, nachdem was vor gewesen ist, die größte Seite zu der Summe der übrigen beiden Seiten? Wie ꝛc. ꝛc.

Also:

$$bc : ab + ac = ab - ac : be$$

d. i. $36' : 23 + 15 = 23' - 15' : be$

oder $36' : 38' = 8' : be$

folglich $be = \frac{38' \times 8'}{36'} = 8'4''$

$ec = bc - be$

d. i. $ec = 36' - 8'4'' = 27'6''$

folglich $\frac{1}{2} ec = dc = 13'8''$

So hatten wir also die Seite dc gefunden.

Nun schließen wir:

$ac : dc = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } c$

d. i. $15' : 13'8'' = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } c$

oder $150'' : 138'' = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } c.$

$\log. \text{Cos. } c = \log. 138'' + \log. \text{Sin. tot.} - \log. 150''.$

$\log. 138 = 2.1398791$

$\log. \text{Sin. tot.} = 10.0000000.$

$12.1398791.$

$\log. 150 = 2.1760913.$

$\log. \text{Cos. } c = 9.9637878,$

welches der Logarithmus des Sin. von $66° 55'$ ist, dessen Complementswinkel also, nemlich $23° 5'$ der Winkel c seyn muß.

Nun wiederhole mir kurz: wie fanden wir den Winkel c?

Wir ꝛc. ꝛc.

Wie könnten wir nun auch wol den Winkel b finden?

Vielleicht auf eben die Art, weil wir hier auch ein rechtwinklichtes Dreieck haben, wo die Hypothenuse gegeben ist.

Was fehlt uns also noch zu wissen, um daraus die übrigen unbekannten Stücke zu erhalten?

Noch einen Winkel oder eine Seite etwa bd.

Wie erhalten wir nun wol die Länge von bd? —

Sie besteht, wie wir sehen, aus zwei Stücken, nemlich: be + ed.

Aus dem eben Vorhergehenden ist die Länge von be bekannt, nemlich $8'4''$.

Was für ein Stück fehlt uns also jetzt nur noch?

ed.

Weil die senkrechte Linie aus dem Mittelpunkte des Kreises die Sehne halbirt; der wie vielste Theil ist also ed davon?

$$ed = \tfrac{1}{2}\,ec = 13'8''$$
$$be = 8'4''$$
$$be + ed = 22'2''$$
$$be + ed = bd$$
$$bd = 22'2''$$

Wie können wir nun schließen, da wir aus dem Vorhergehenden wissen, wie die Seite in einem rechtwinklichten Dreiecke, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, sich verhält zu einer anliegenden Seite:

$$ba : bd = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. b.}$$
d. i. $23' : 22'2'' = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. b.}$
oder $230'' : 222'' = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. b.}$

folglich $\log. \text{Cos. b} = \log. 222 + \log. \text{Sin. tot.} - \log. 230.$

$$\log. 222 = 2.3463530$$
$$\log. \text{Sin. tot.} = 10.0000000$$
$$12.3463530$$
$$\log. 230 = 2.3617278$$
$$\log. \text{Cos. b} = 9.9846252.$$

nach den Tabellen 74° 51′ als Complementswinkel von b; folglich muß ∠b gleich seyn 15° 9′.

So hatten wir also den zweiten Winkel auch gefunden. —

Welches unbekannte Stück fehlt uns nun noch?

Noch der 3te Winkel a.

Wie erhalten wir diesen Winkel a?

$$\angle c = 23^\circ 5'$$
$$\angle b = 15^\circ 9'$$
$$c + b = 38^\circ 14'$$
$$c + b + a = 180^\circ$$
$$\angle a = 141^\circ 46'$$

Zur mehreren Erläuterung wollen wir noch ein anderes Beispiel berechnen.

Es sei, s. Fig., ab = 354 Fuß,
ac = 346 —
und bc = 625 —

folglich ab + ac = 700 Fuß
ab — ac = 8 —

$$bc : ab + ac = ab - ac : be$$
$$625 : 700 = 8 : be$$

$$\log. be = \log. 700 + \log. 8 - \log. 625.$$
$$\log. 700 = 2.8450980$$
$$\log. 8 = 0.9030900$$
$$3.7481880$$
$$\log. 625 = 2.7958800$$
$$\log. be = 0{,}9523080.$$
$$= 8{,}96 \text{ Fuß}$$

$$be = 8{,}96 \text{ Fuß}$$
$$bc = 625.$$
$$ec = 616{,}04 \text{ Fuß}$$
$$\tfrac{1}{2} ec = dc = 308{,}02.$$
$$bd = be + \tfrac{1}{2} ec = 316{,}98.$$
$$ac : cd = R : \text{Cos. } c$$
$$346 : 308{,}02 = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } c$$

$$\text{log. Cos. } c = \text{log. } 308{,}02 + \text{log. Sin. tot.} - \text{log. } 346$$
$$\text{log. } 308{,}02 = 2{,}4885789$$
$$\text{log. Sin. tot.} = 10{,}0000000$$
$$12{,}4885789$$
$$\text{log. } 346 = 2{,}5390761$$
$$\text{log. Cos. } c = 9{,}9495028.$$
$$\text{also } c = 27^\circ\, 5'\, 52''$$
$$ba : bd = R : \text{Cos. } b.$$
$$354 : 316{,}98 = \text{Sin. tot.} : \text{Cos. } b$$

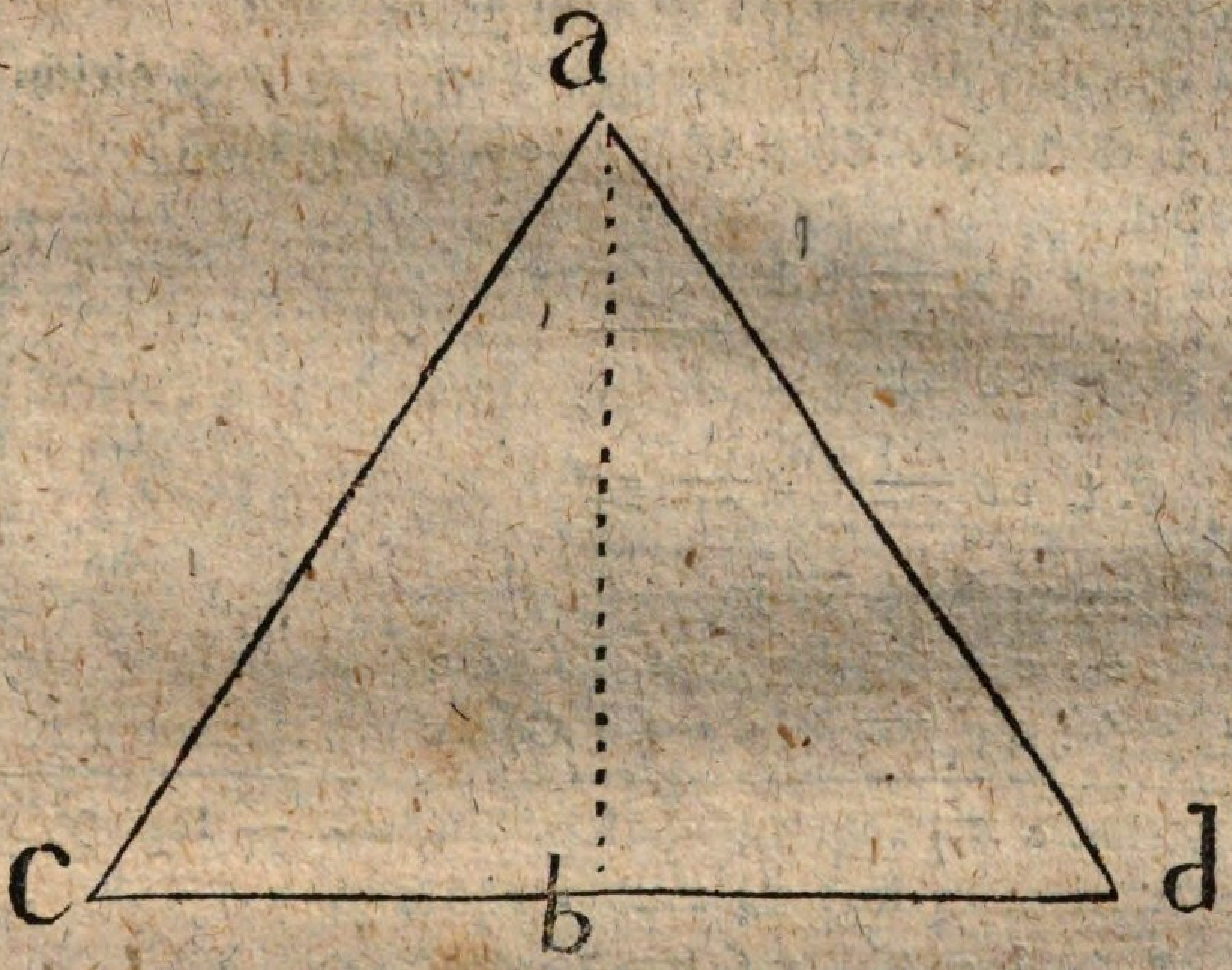
$$\text{log. Cos. } b = \text{log. } 316{,}98 + \text{log. Sin. tot.} - \text{log. } 354.$$
$$\text{log. } 316{,}98 = 2{,}5000319$$
$$\text{Sin. tot.} = 10{,}0000000$$
$$12{,}5000319$$
$$\text{log. } 354 = 2{,}5490033$$
$$\text{log. Cos. } b = 9{,}9510286$$
$$\text{also } b = 26^\circ\, 16'\, 14''$$

$$c = 27^\circ\, 5'\, 52''$$
$$b = 26^\circ\, 16'\, 14''$$
$$b + c = 53^\circ\, 22'\, 6''$$
$$a + b + c = 179^\circ\, 59'\, 60''$$
$$a = 126^\circ\, 37'\, 54''.$$

§. 38.

Wenn das schiefwinklichte Dreieck nun aber ein gleichschenklichtes wäre; wie könnten wir denn kürzer verfahren? —

z. B.



Es sei ac = ad = 36′
und cd = 28′

Wie zertheilt die senkrechte Linie ab das Dreieck?

In die beiden Dreiecke abc und abd.

Wie verhalten sich diese in Absicht ihrer Größe gegen einander?

abc = abd.

Warum?

Worin kommen sie mit einander überein?

ac = ad nach der Voraussetzung,

ab = ab.

Und wie verhalten sich die beiden Winkel bei b, welche durch die senkrechte Linie gebildet sind?

Die sind sich gleich.

Warum sind also die Dreiecke abc, und abd sich gleich? Weil &c. &c.

Wenn sie sich gleich sind, was können wir denn von ihren gleichnamigen Theilen behaupten?

So sind die gleichnamigen Theile sich auch gleich.

Und welcher Theil ist mit cb gleichnamig?

bd.

Also cb = bd

und daher $cb = \frac{1}{2} cd$

d. i. $cb = \frac{28'}{2} = 14'$

Nun verhält sich:

ac : cb = Sin. tot. : Cos. c

d. i. 36′ : 14′ = Sin. tot. : Cos. c

log. Cos. c = log. 14′ + log. Sin. tot. — log. 36′.

log. 14 =	1.1461280
log. Sin. tot. =	10.0000000
	11.1461280
log. 36 =	1,5563025
log. Cos. c =	9,5898255

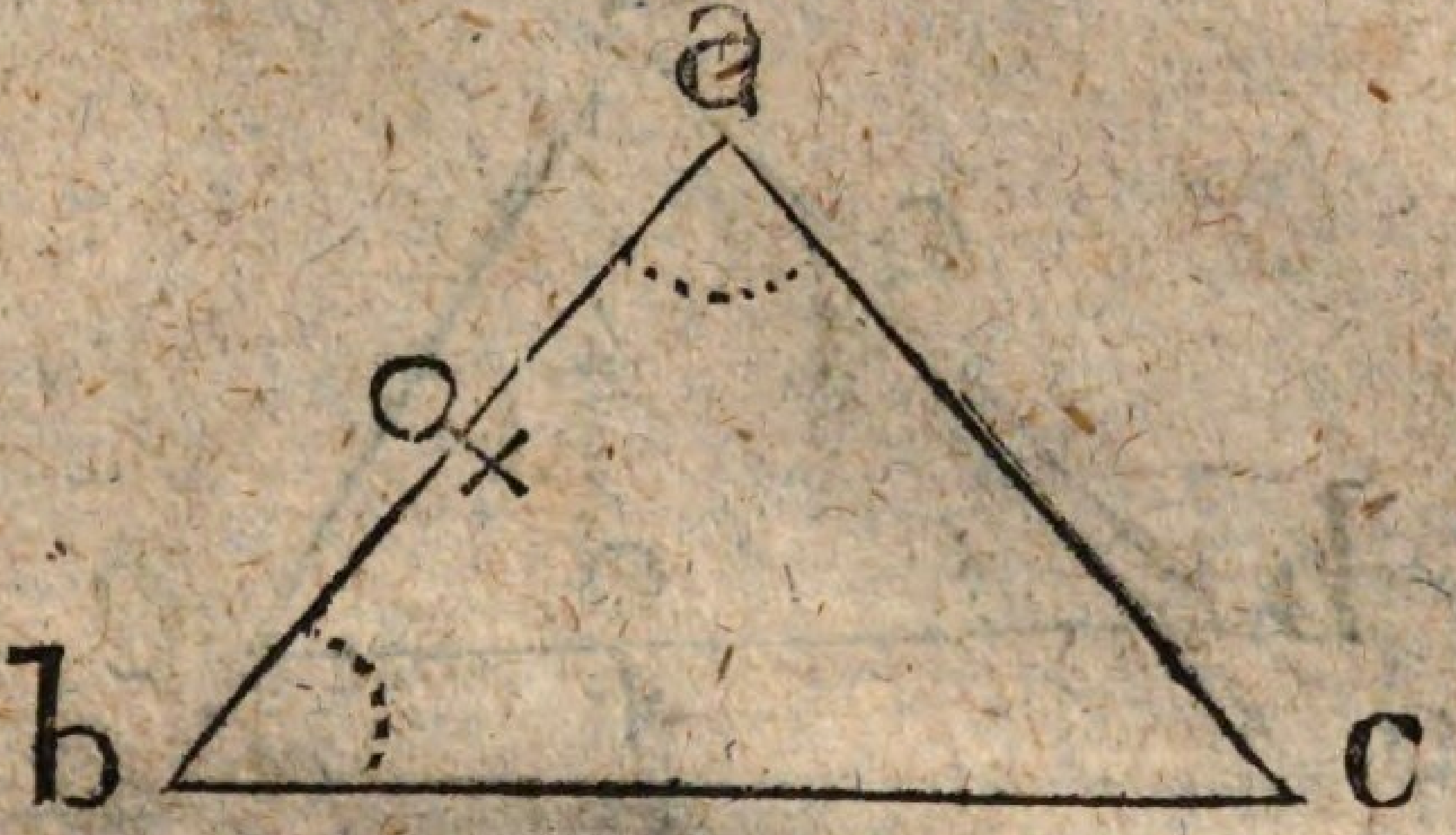
= 22° 53′; davon der Complements-winkel = 67° 7′ für den ∠c.

Da der Winkel c also 67° 7′ hält; wie groß muß denn der Winkel d seyn, weil das Dreieck acd gleichschenklicht ist?

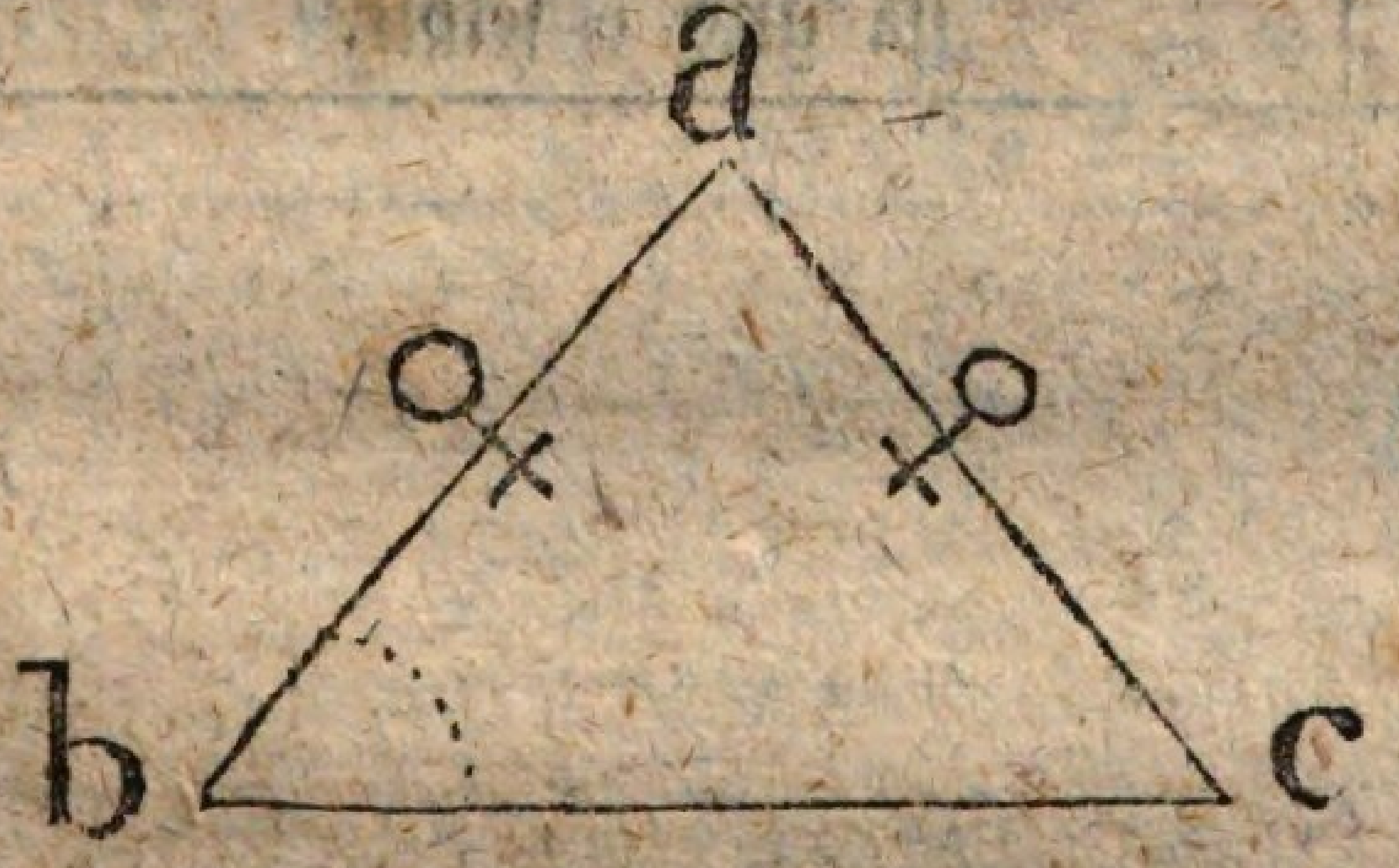
Der Winkel d muß auch 67° 7′ enthalten.

Und der 3te Winkel wäre also — —?

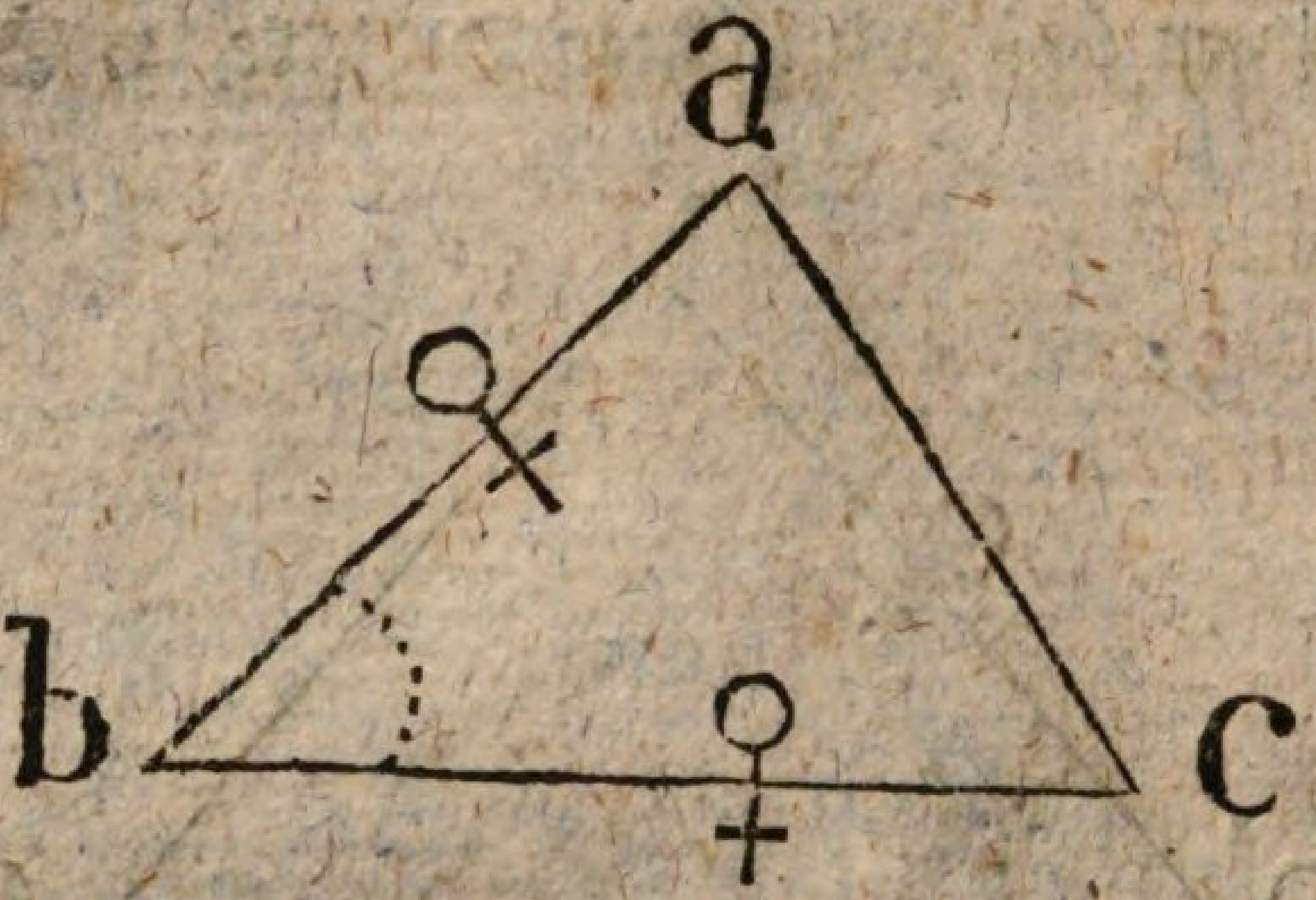
In einem schiefwinklichten Dreiecke, z. B.:



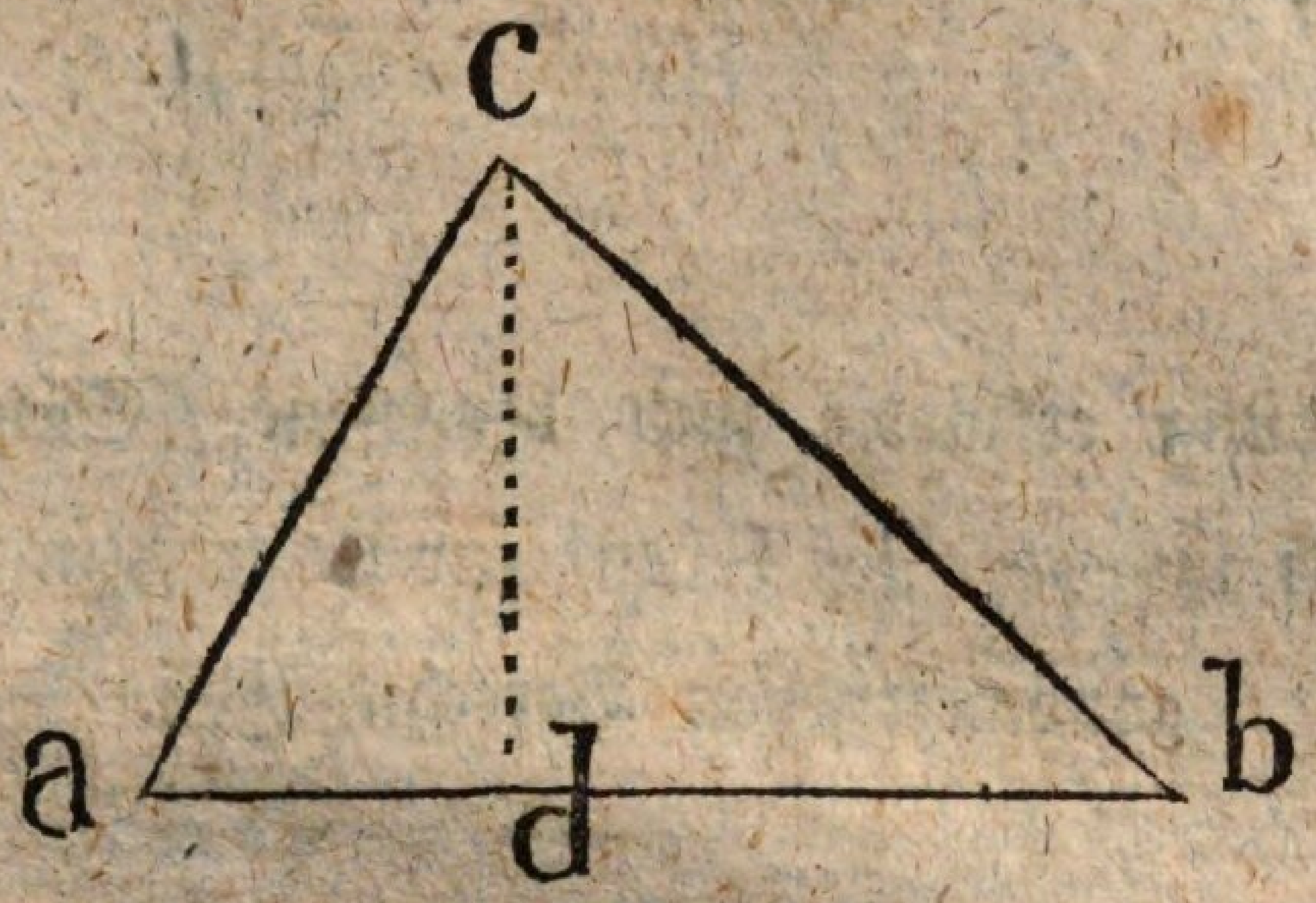
gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportion oder Rechnungsregel.
ab und ∠a und ∠b	die Seite ac	Sin. c : Sin. b = ab : ac
	die Seite bc	Sin. c : Sin. a = ab : cb
	∠c	180° − ∠a + ∠b



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
ab und ac nebst ∠b	∠c	ab : ac = Sin. b : Sin. c
	∠a	180° − ∠b + ∠c



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
ab, bc und den eingeschlossenen ∠b	∠a	(bc + ab) : (bc — ab) = Tang.($\frac{1}{2}$a + $\frac{1}{2}$c) : (Tang. $\frac{1}{2}$a — $\frac{1}{2}$c)
	∠c	So findet man die halbe Differenz der Winkel a und c, deren halbe Summe bekannt ist, und daraus die Winkel a und c selbst.



gegebene Stücke	gesuchte Stücke	Proportionen:
Alle drei Seiten ab, bc, und ac	Alle drei Winkel a, b und c	Vermittelst der senkrechten Linie schließt man: ab : bc + ac = bc — ac : db — ad. und erhält db und ad. cb : bd = R : Cos. b ac : ad = R : Cos. a.

Anwendung erklärter und bewiesener Sätze auf Fälle im gemeinen Leben, zur Uebung in trigonometrischen Berechnungen.

Aufgabe 1.

Gesetzt du möchtest gerne wissen, wie hoch unsere Thurmspitze, hier in Heide, von der Erde entfernt sei; wie könntest du das nun wol, von unserm schönen Marktplatze aus, untersuchen?

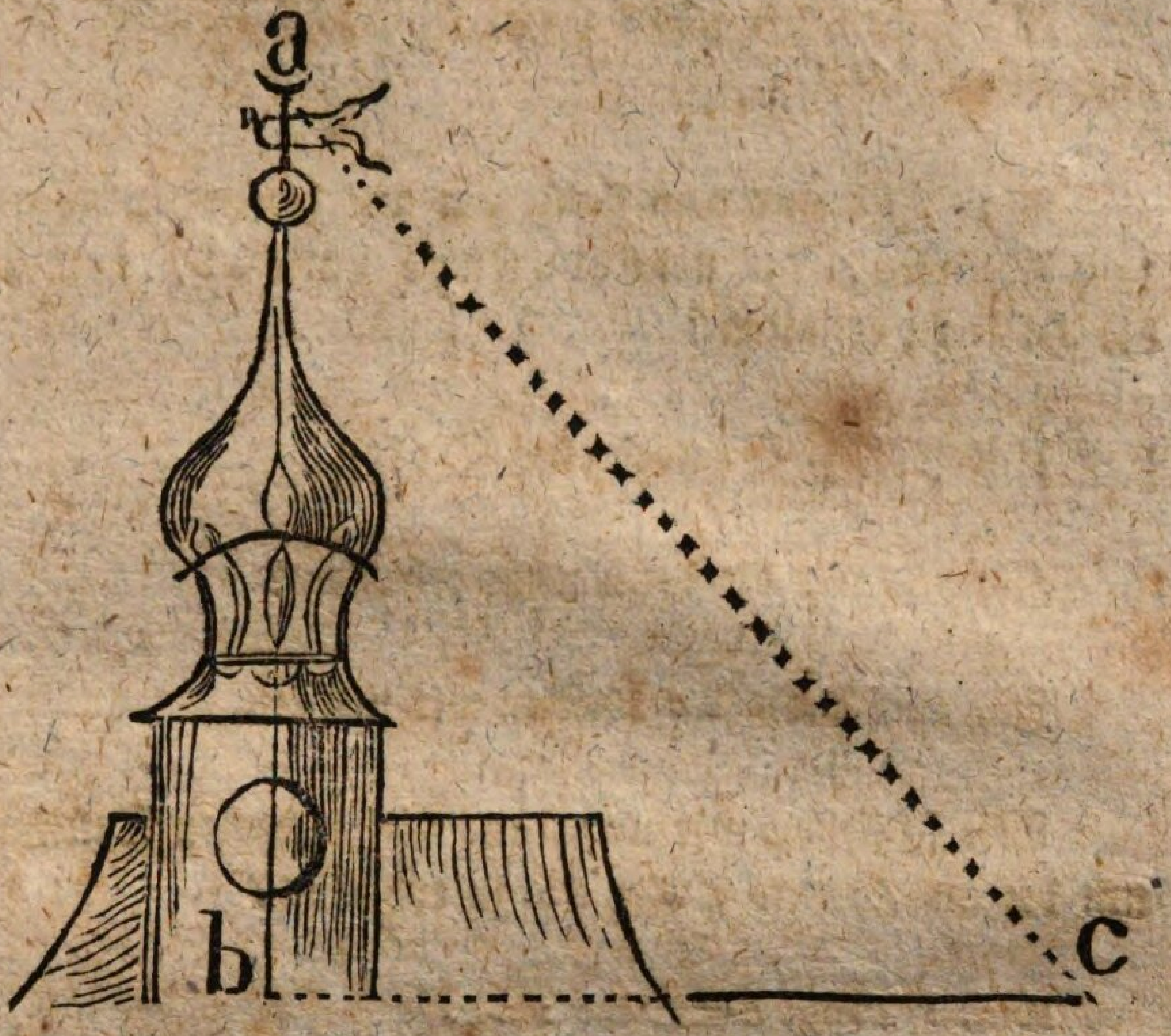
Ich könnte hier einen Standpunkt wählen. Wohin denn mit dem Winkelmesser erst visiren?

Nach der Spitze des Thurms, und auch nach dem Fuße desselben.

Warum denn dies?

Um den Winkel, welchen der Standpunkt mit diesen beiden Punkten bildet, zu erhalten.

Um es mehr zu verdeutlichen, wollen wir eine Anschauung machen.



Z. B. Es sei der Punkt c unser gewählter Standpunkt.

Wir visiren nach a und b, um den Winkel bei c zu erhalten.

Wie nun weiter — —?

Vergeß' nicht, daß wir eigentlich die senkrechte Höhe von a nach b suchen wollen.

Was für eine Figur bildet diese senkrechte Linie mit ac und bc?

Ein rechtwinklichtes Dreieck.

Also haben wir schon einen rechten Winkel, und auch den Winkel c.

Was fehlt uns nun noch, um aus diesen bekannten Stücken, die unbekannte Linie ab, nemlich die Höhe zu erhalten?

Uns fehlt z. B. noch eine Seite.

Können wir die denn nicht erhalten?

Ja, die Seite bc können wir messen.

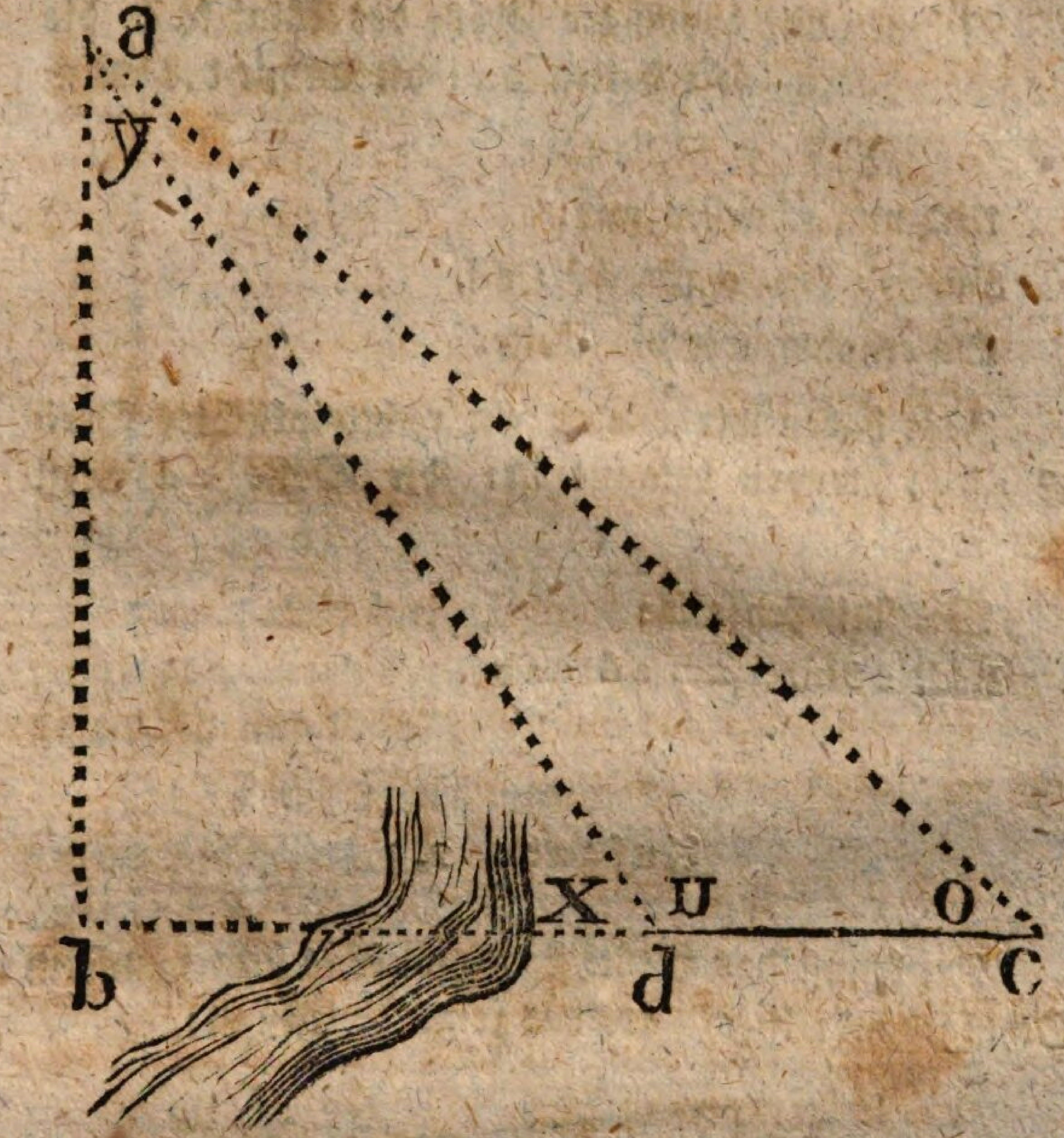
Wie schließen wir nun, aus diesen dreien Stücken, um die unbekannte Seite ab zu erhalten?

Rad. : Tang. c = bc : ab.

Anmerk. Eine andere Auflösung vermittelst eines Spazierstockes wird dir noch wol aus der Geometrie in Erinnerung seyn.

Wenn aber z. B. Wasser oder dergleichen Hindernisse im Wege wären, so, daß wir nicht recht gut an die senkrechte Linie kommen könnten, oder auch nicht hingehen wollten; wie denn?

(Er schweigt.)



Wir nehmen denn auf einer horizontalen Ebene eine beliebige Linie an — hier d c — die wir erst messen.

Nun können wir auch vermittelst eines Winkelmessers die Winkel x und o bestimmen.

Wir erhalten also drei bekannte Stücke, woraus wir alle übrigen unbekannten Stücke des Dreieckes a d c finden können.

Nemlich:

Der äußere Winkel x ist gleich den beiden innern gegenüber liegenden y + o.

Nehmen wir davon die Größe des Winkels o, die wir schon haben, so erhalten wir: die Größe des Winkels y, nemlich: x — o.

Und nun schließen wir:

Sin. y : Sin. o = dc : ad.

So erhalten wir die Seite.

Jetzt haben wir wieder ein rechtwinklichtes Dreieck abd, wovon bekannt ist: die Seite ad nebst dem ∠x.

Wir schließen also:

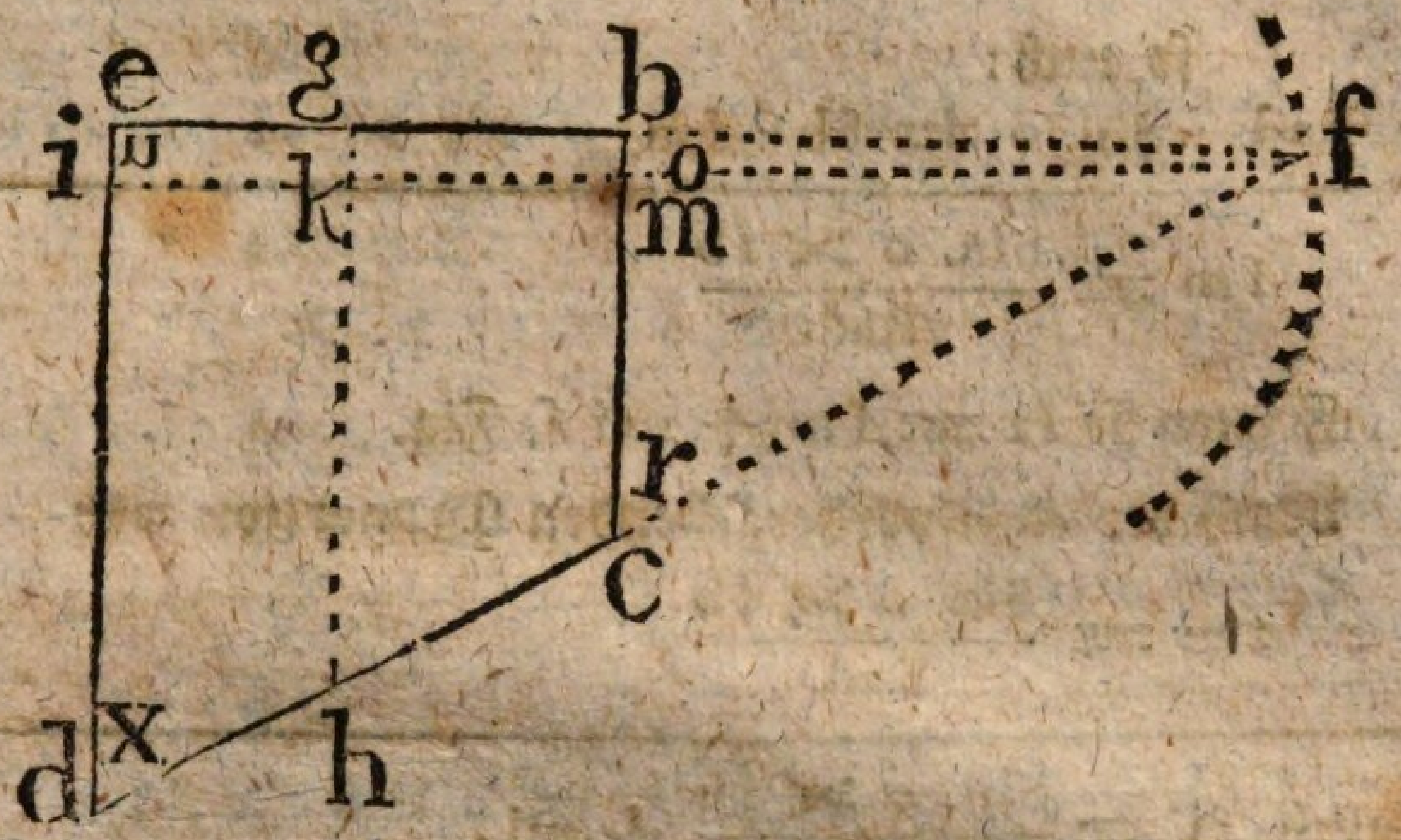
Rad. : Sin. x = ad : ab.

Aufgabe 2.

Du kennst das Stück Land, welches hinter unserm Schulgebäude liegt. Es hat folgende Gestalt:

Die Seite ed und bc sind gleichlaufend.

Dies sollte nun in zwei gleiche Theile zerlegt werden, und wir hätten dieses zu bestimmen.



Wir haben hier in gerader Richtung die beiden ungleichlaufenden Seiten verlängert, bis sie sich durchschneiden, und können nun erst die Seite bc messen.

Da fe die beiden gleichlaufenden Linien bc und ed durchschneidet, so ist der Winkel o = ∠u, und ∠r = ∠x.

So können wir schließen:

Sin. f : Sin. o = bc : fe

folglich $fe = \frac{\text{Sin. o} \times bc}{\text{Sin. f.}}$

Auf gleiche Weise vermittelst der Winkel r und x.

Sin. f : Sin. r = bc : fb

$fb = \frac{\text{Sin. r} \times bc}{\text{Sin. f.}}$

Um es uns deutlicher zu denken, haben wir mit fe einen Kreisbogen gemacht, und wir können schließen:

Rad. : Sin. u = fe : fi

folglich $fi = \frac{\text{Sin. u} \times fe}{\text{Rad.}}$

so auch:

$$\text{Rad.} : \text{Sin. o} = fb : fm$$

$$fm = \frac{\text{Sin. o} \times fb}{\text{Rad.}}$$

Ferner ist $fi = fm + mi$ s. Fig.

Nach der eben vorhergehenden Proportion war

$$fm = \frac{\text{Sin. o} \times fb}{\text{Rad.}}$$

folglich $fi = \frac{\text{Sin. o} \times fb}{\text{Rad.}} + mi$,

und $mi = fi - fm$,

nach derselben eben vorhergehenden Proportion verglichen; auch $fe \times \text{Sin. u} - fb \times \text{Sin. u} = (fe - fb) \times \text{Sin. u}$.

Weil nun sich verhält:

$$fi : fk = fk : (fm + \tfrac{1}{2} mi),$$

und in jeder geometrischen Proportion, also auch in dieser das Produkt des 2ten und 3ten Gliedes gleich ist dem Produkte des 1sten und 4ten Gliedes; so folgt, daß

$$fk^2 = fi \times (fm + \tfrac{1}{2} mi).$$

Und nach der schon 2 mal angeführten Proportion können wir statt dessen nun auch setzen:

$$fk^2 = fe \times \text{Sin. u} \times ((fb \times \text{Sin. u}) + \tfrac{1}{2} (fe - fb) \text{Sin. u})$$

$$fk^2 = fe \times \text{Sin. u} \times ((fb \times \text{Sin. u}) + \tfrac{1}{2} fe \times \text{Sin. u} - \tfrac{1}{2} fb \times \text{Sin. u})$$

und eben sowol ist auch gleich:

$$fk^2 = fe \times \text{Sin. u} \times ((\tfrac{1}{2} fb \times \text{Sin. u}) + \tfrac{1}{2} fe \times \text{Sin. u})$$

oder:

$$fk^2 = fe \times Sin.\,u \times (\tfrac{1}{2}(fb + fe)) \times Sin.\,u.$$

also auch:

$$fk^2 = \tfrac{1}{2}\,fe \times Sin.\,u^2 \times (fb + fe)$$

folglich:

$$fk = \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,fe \times Sin.\,u^2 \times (fb + fe))}$$

$$fk = \sqrt{Sin.\,u^2} \times \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,fe \times (fb + fe))}$$

d. i.

$$fk = Sin.\,u \times \sqrt{(\tfrac{1}{2}\,fe \times (fb + fe))}$$

Diese letzterhaltene Gleichung wollen wir nun in Logarithmen ausdrucken.

$$fk = log.\,Sin.\,u + \tfrac{1}{2}\,(log.\,\tfrac{1}{2} + log.\,fe + log.\,(fb + fe))$$

Nun ist nach unserer Figur

$$mk = fk - fm.$$

Und dieses können wir nun also verändern:

$$log.\,mk = log.\,fk - log.\,fb - log.\,Sin.\,u.$$

$$log.\,mk = log.\,Sin.\,u + \tfrac{1}{2} \times (log.\,\tfrac{1}{2} + log.\,fe + log.\,(fb + fe)) - log.\,fb - log.\,Sin.\,u.$$

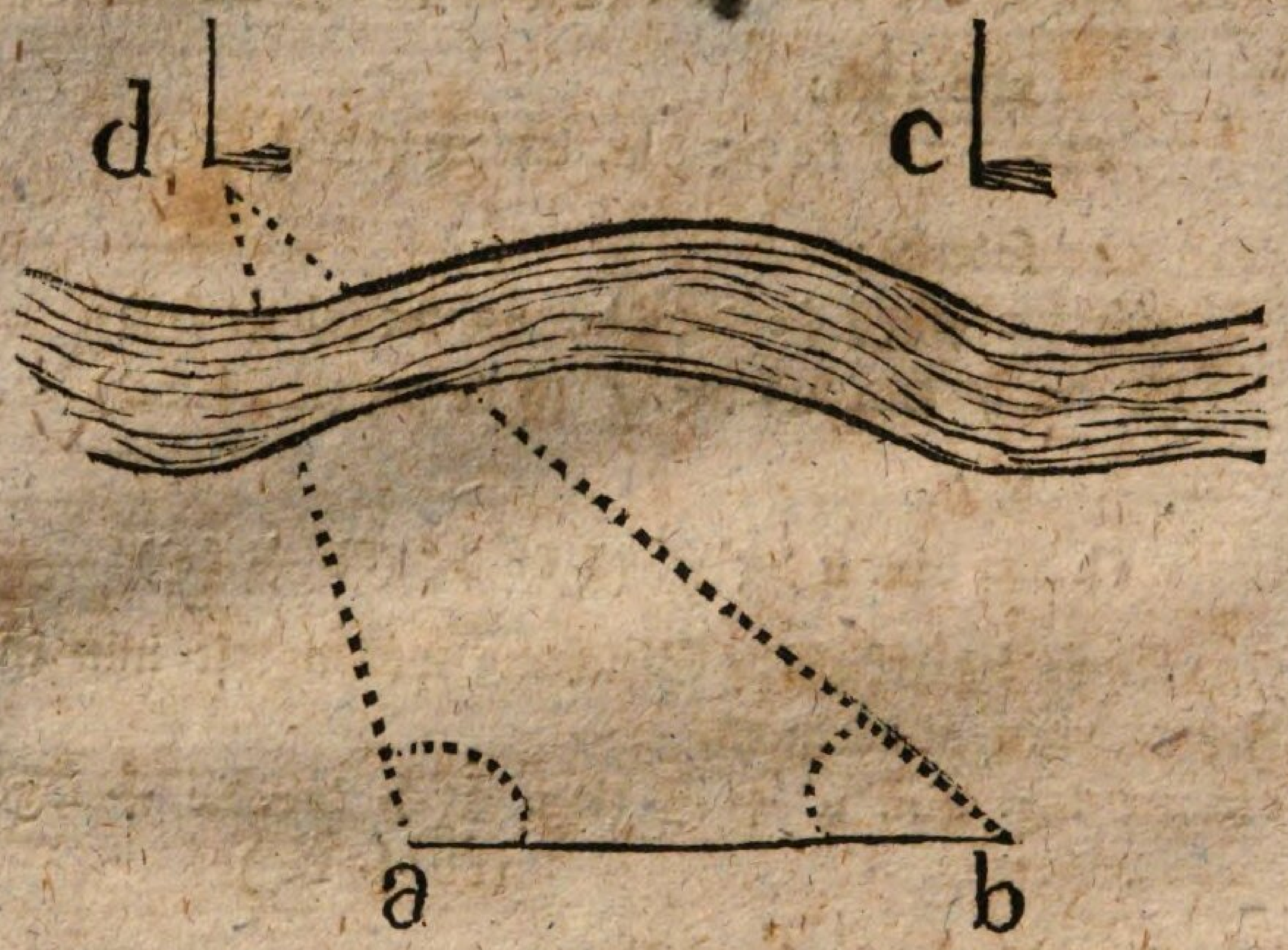
d. i. endlich

$$log.\,mk = \tfrac{1}{2} \times (log.\,\tfrac{1}{2} + log.\,fe + log.\,(fb + fe)) - log.\,fb.$$

Aufgabe 3.

Gesetzt wir sollten die Entfernung zweier Oerter, zu deren keinem man, gewisser Hindernisse wegen, hinkommen kann, ausmessen; wie wäre dies wol zu bewerkstelligen? —

z. B.



Wenn wir erst, wie vorher, eine beliebige Linie — hier a b — auf freiem Felde annehmen und messen.

Wohin müssen wir nun wol visiren, wenn wir nach der letzten ähnlichen Aufgabe urtheilen wollen?

Wir müssen wol von a nach d, und von b nach d visiren.

Und wenn wir nach dieser Richtung Linien ziehen, so können wir uns hier ein Dreieck d a b gedenken; welche Stücke sind uns davon bekannt oder welche können wir leicht erhalten?

Die Seite a b haben wir gemessen, und die Winkel bei a und b können wir leicht erhalten.

Wenn uns in einem Dreiecke eine Seite und 2 Winkel bekannt sind; was ist uns denn daraus zu folgern möglich?

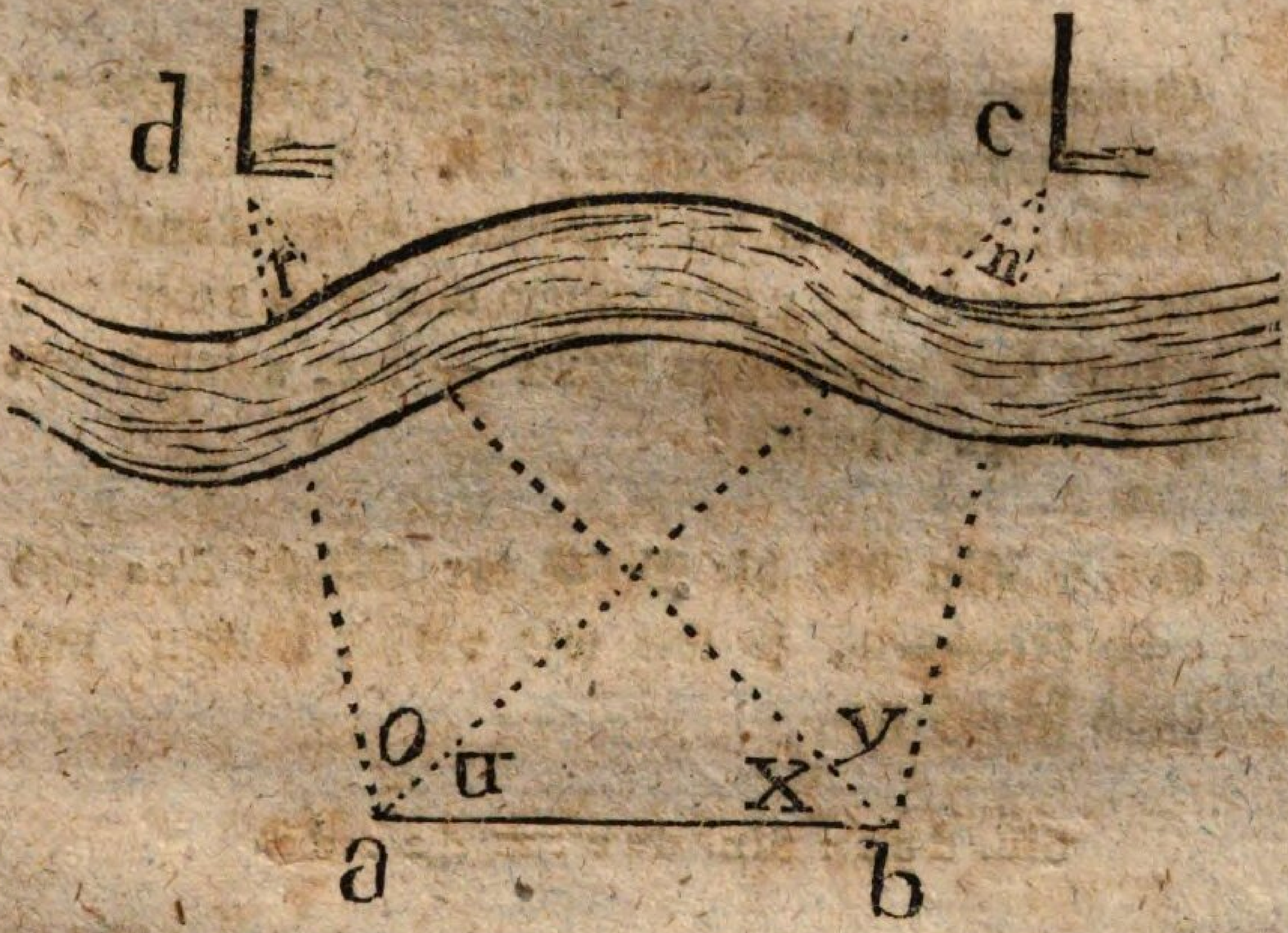
Wir können daraus die andern unbekannten Stücke des Dreieckes herleiten.

Wie schließen wir nun hier?

Sin. r : Sin. x = a b : a d.

Nun wollen wir auch von den beiden Endpunkten der angenommenen und gemessenen Linie nach dem Punkte c visiren, so können wir uns ebenfalls an der Seite ein Dreieck gedenken.

z. B.



Was ist uns nun auch von diesem Dreiecke a c b bekannt, oder was können wir auch leicht erhalten?

Die Seite a b ist bekannt, und die Winkel c a b und c b a können wir mit einem Winkelmesser leicht erhalten.

Da wir also eine Seite, und 2, folglich 3 Winkel als bekannte Stücke haben; wie können wir denn nun schließen?

Sin. a c b : Sin. c b a = a b : a c.

Jetzt kennen wir also die Länge der Seiten ad und ac.

Den Winkel, der von diesen beiden Seiten eingeschlossen ist, können wir leicht erhalten, nemlich:

$$\angle dac + cab = \angle dab \text{ s. Fig.}$$
$$cab = cab$$

folglich $\angle dac = \angle dab - cab$.

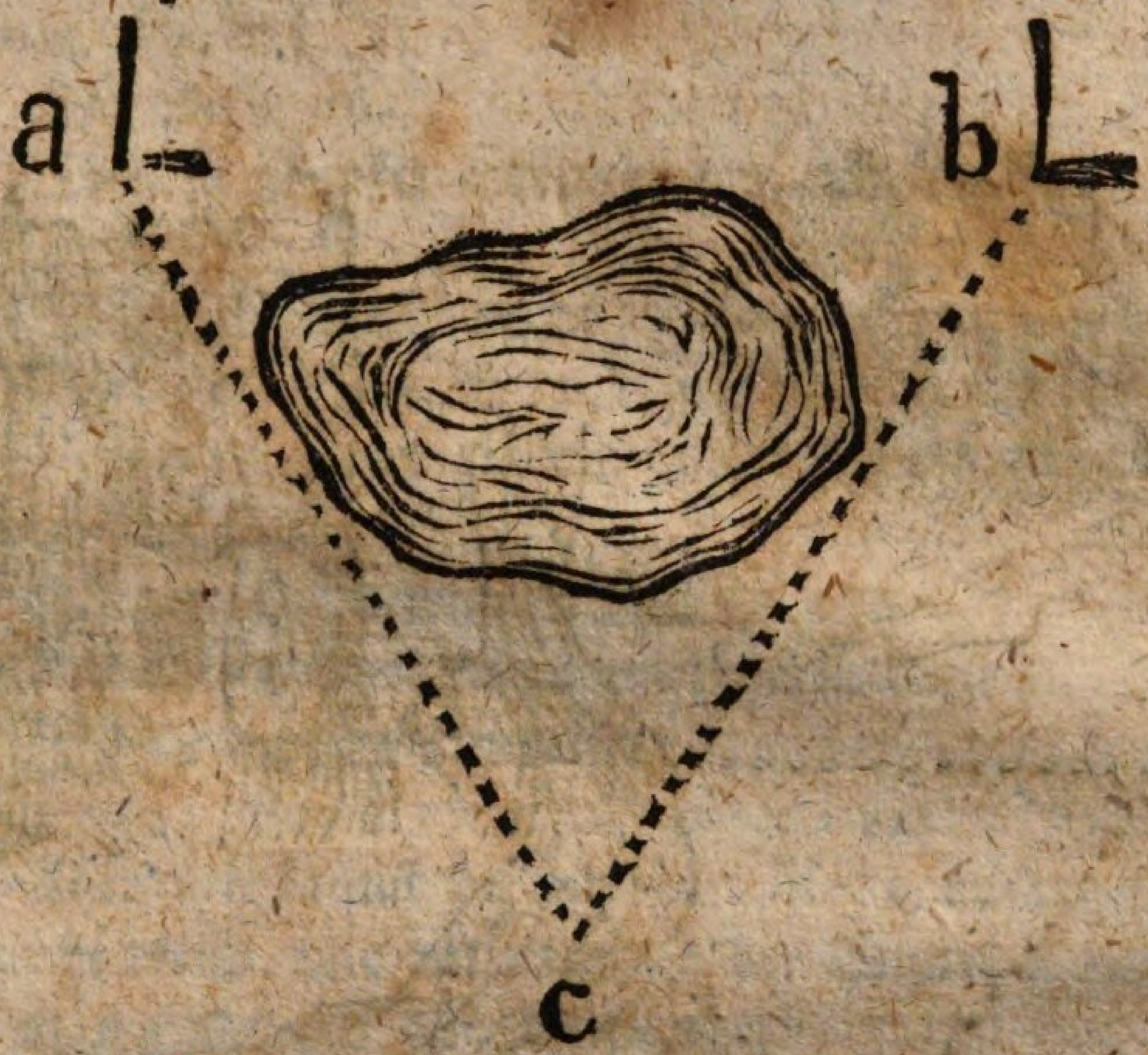
Gedenken wir uns nun ein Dreieck zusammen gesetzt von diesen beiden Seiten, die den Winkel dac einschließen, nebst der zu findenden Entfernung dc, also das Dreieck dac; wie müssen wir denn verfahren, um daraus das unbekannte Stück — hier nemlich von d nach c — zu erhalten?

Erst müssen wir die Größe der Winkel dca und cdb berechnen, so wie wir vorher lernten, und dann schließen:

$$\text{Sin. } dca : \text{Sin. } dac = da : dc.$$

Oder wenn die Aufgabe wäre: die Weite zweier Oerter von einander zu finden, deren Entfernung man ebenfalls nicht gerade zu ausmessen, zu denen beiden man aber doch von einem dritten Orte in gerader Linie hinkommen kann.

z. B.



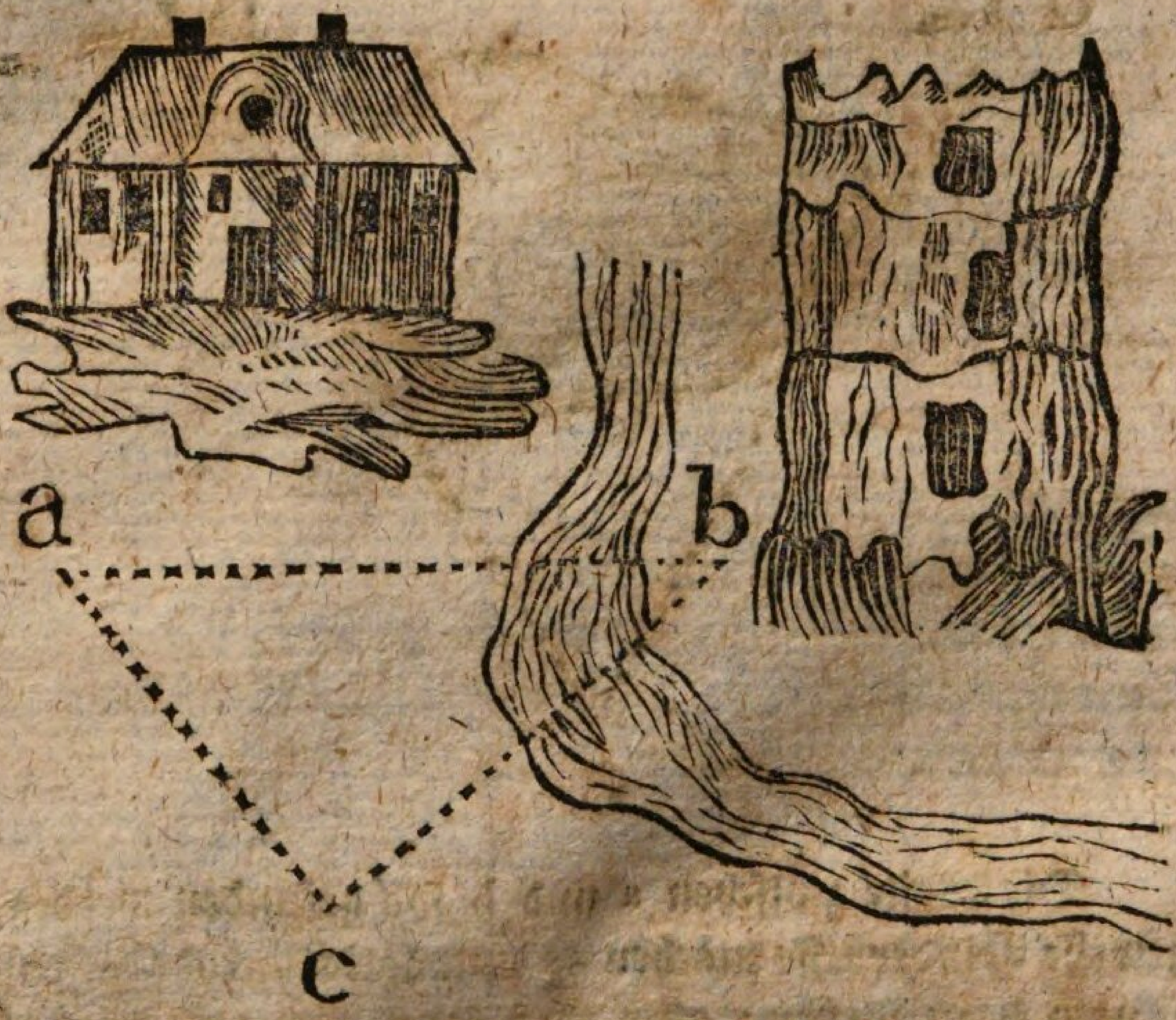
Die Weite zwischen a und b soll gefunden werden, gewisse Hindernisse machen es unmöglich gerade zu von a nach b zu messen; aber man kann von dem gewählten Standpunkte c in gerader Richtung nach a und b messen.

Welche bekannte Stücke des Dreieckes a b c haben wir, oder welche können wir leicht erhalten?

Wie verfahren wir nun, um daraus die unbekannte Seite a b zu erhalten?

(s. die eben vorhergehende Aufgabe.)

Aufgabe 4.



Nehmen wir z. B. in c den beliebigen Standpunkt, so haben wir drei Punkte a b c, die wir uns durch gerade Linien verbunden gedenken können; also ein Dreieck a b c.

Welche Stücke sind uns nun von diesem Dreiecke bekannt, oder welche können wir finden?

Die Linie a c können wir messen.

Auch die Größe der Winkel bei a und c erhalten, weil wir nach b hinüber visiren können.

Also die erste Frage wieder: welche Stücke sind uns von dem Dreiecke a b c bekannt?

Die Seite a c, nebst den beiden an dieser Seite liegenden Winkeln.

Und welche Seite sollen wir, nach der Voraussetzung, finden?

Die Seite ab.

(Zu dem Punkte a können wir nur kommen, zu b nicht.)

Wie schließen wir nun? — —

Weil wir eine Seite suchen, womit müssen wir — wie wir oben gelernt haben — die Proportion denn anfangen?

Mit trigonometrischen Linien.

Und mit welcher trigonometrischen Linie?

Mit dem Sin. b, nemlich:

Sin. b : ac = Sin. x : ab.

Aber wie kannst du mit dem Sin. b anfangen, da du nicht weißt, wie viele Grade der Winkel b enthält, also auch nicht den Sin. bestimmen?

Da ich die Größe der Winkel bei a und c weiß, so darf ich nur die Summe derselben von 180° subtrahiren, um die Größe des Winkels bei b zu erhalten.

Und welche unbekannte Linie ist uns auch noch von dem Dreiecke abc zu finden möglich?

Die Seite bc.

Durch welche Proportion finden wir diese denn?

Aufgabe 5.

In der 3ten Aufgabe war die Seite ab gegeben; wenn nun aber umgekehrt die Seite dc bekannt wäre, und auch die Winkel o, u, x und y; könnten denn daraus die übrigen Stücke der Figur gefunden werden? —

Es sei z. B. dc = 496°
die Winkel $o + u = 97° 12'$
$\angle u = 56° 4'$
$\angle x + y = 76° 10'$
und $\angle x = 48° 48'$

In dem Dreiecke dab ist also
$\angle x = 48° 48'$
und $\angle o + u = 97° 12'$

folglich $\angle x + o + u = 146°$
$\angle r + x + o + u = 180°$

so ist $\angle r = 34°$

Und in dem Dreiecke abc ist
$\angle u = 56° 4'$
$\angle x + y = 76° 10'$

$\angle u + x + y = 132° 14'$
$\angle n + u + x + y = 180°$

folglich $\angle n = 47° 46'$

Alle drei Winkel kennen wir also in den genannten Dreiecken; die Seiten nicht. Obgleich nun keine Seite bekannt ist, so kann man doch auf das Verhältniß der Seiten schließen, vermittelst der Sinusse der bekannten Winkel dieser Dreiecke.

In dem Dreiecke abd verhält sich:

$$\text{Sin. } x : \text{Sin. } r = ad : ab.$$

Und im Dreiecke abc:

$$\text{Sin. } n : \text{Sin. } x + y = ab : ac$$

$$(\text{S. } x \times \text{S. } n) : (\text{S. } r \times \text{S. } x + y) = ad \times ab : ab \times ac.$$

Es ist aber ad $\times$ ab : ab $\times$ ac = ad : ac, so folgt daraus, daß auch sich verhalten muß:

$$(S.\,x \times S.\,n) : (S.\,r \times S.\,x + y) = ad : ac$$

und auch wieder:

$$\frac{S.\,x \times S.\,n}{S.\,x + y} : S.\,r = ad : ac$$

d. h. nach den oben angenommenen Größen

$$\frac{S.\,48^\circ\,48' \times S.\,47^\circ\,46'}{S.\,76^\circ\,10'} : 34^\circ = ad : ac$$

$$\log.\,S.\,48^\circ\,48' = 9.8764574$$
$$\log.\,S.\,47^\circ\,46' = 9.8694744$$
$$19.7459318$$
$$\log.\,S.\,76^\circ\,10' = 9.9872171$$

folglich $\log.\left\{\frac{S.\,48^\circ\,48' \times S.\,47^\circ\,46'}{S.\,76^\circ\,10'}\right. = 9.7587147$

Dieser Logarithmus gehört nun, nach den Tabellen, zu dem Sin. des Winkels von 35° 1′.

Da nun der Sin. von 35° 1′ = 5738147
und der Sin. von 34° = 5591929

so verhält sich:

ad : ac = 5738147 : 5591929.

Dies wäre also das Verhältniß der Seite ad und ac, und da wir nun auch wissen, wie groß ∠ o ist, so können wir, vermittelst des Satzes: aus 2 bekannten Seiten und dem eingeschlossenen Winkel, die beiden andern Winkel des Dreieckes dac berechnen, und mit Hülfe der Seite dc zuletzt die Linie ab finden, nemlich:

Sin. x : Sin. r = ad : ab.

Wir wollen sehen, ob wir diese etwas weitläufige Berechnung nicht abkürzen können.

Die Seite dc, s. Fig., ist gegeben, und die Winkel, welche an derselben liegen, sind auch bekannt.

Wir sollen daraus die Seite ab finden.

Gesetzt wir wüßten schon die Länge von ab, welche Länge könnten wir daraus finden?

Die Länge von dc.

Da uns diese Seite nun aber schon gegeben ist, so wäre die Berechnung ja überflüssig.

Wenn wir die Länge von beiden Seiten haben, so ist uns dadurch auch das Verhältniß der Seiten gegen einander bekannt.

Und wenn wir das Verhältniß der beiden Seiten wissen, so können wir durch eine Proportion das andere Verhältniß erhalten?

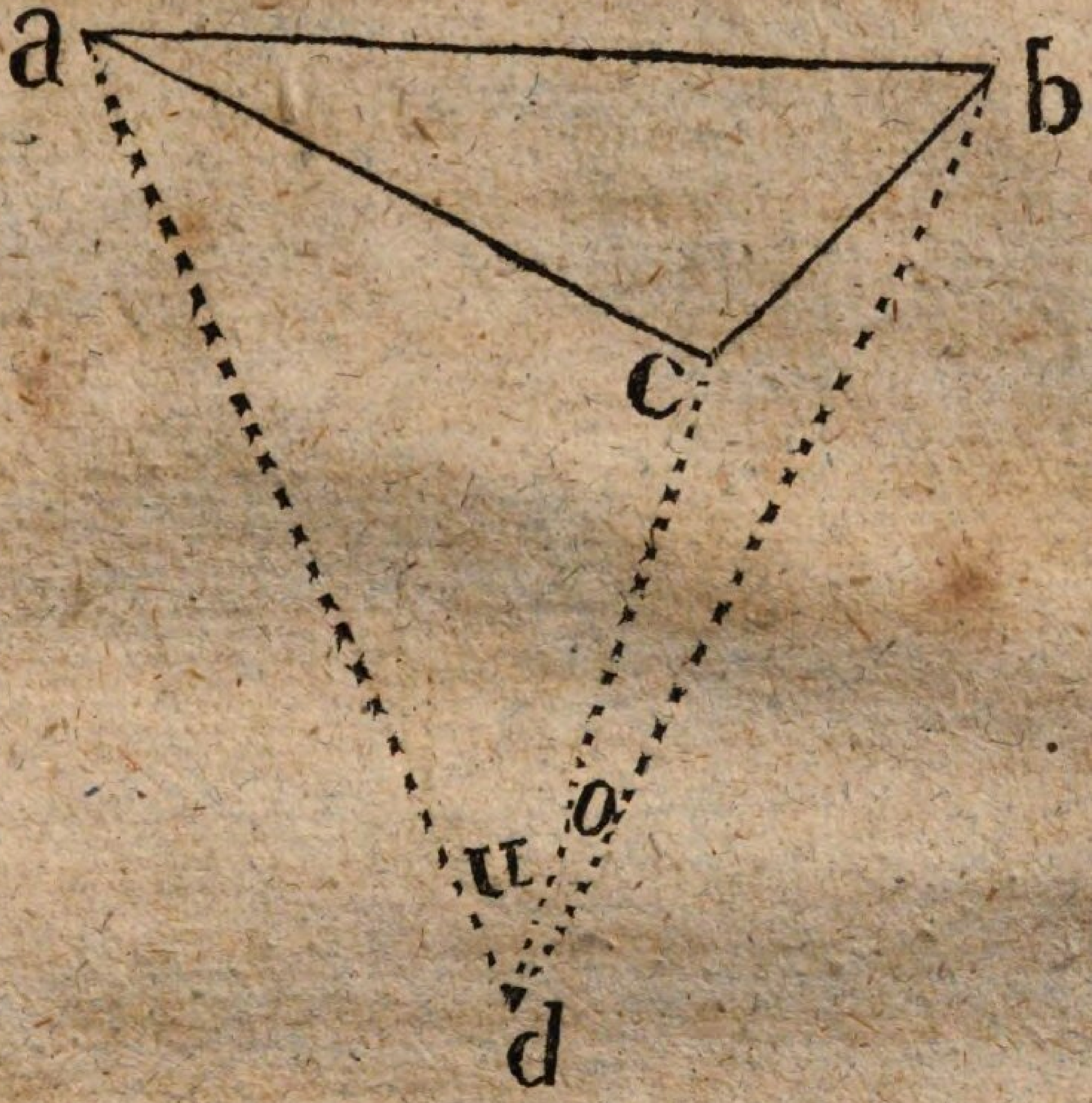
Z. B. Die Linie ab wäre 1814 Ruthen lang. Hieraus nebst den bekannten Winkeln können wir die Länge von dc erhalten; und nun schließen wir:

dc zu 1814°, wie die gegebene Länge dc, zu der wirklichen Länge von ab.

Aufgabe 6.

Hier bei Heide kann man deutlich die Kirchenthürme von Neuenkirchen, Wesselburen und Wöhren unterscheiden. Gesetzt man wüßte nun die Entfernung in gerader Richtung von Wöhren nach Wesselburen, von Wesselburen nach Neuenkirchen, und von Neuenkirchen wieder nach Wöhren, und wünschte zu wissen, wie weit es von hier nach einem jeden Orte wäre; könnten wir dies wol durch Berechnung herausbringen? —

z. B.

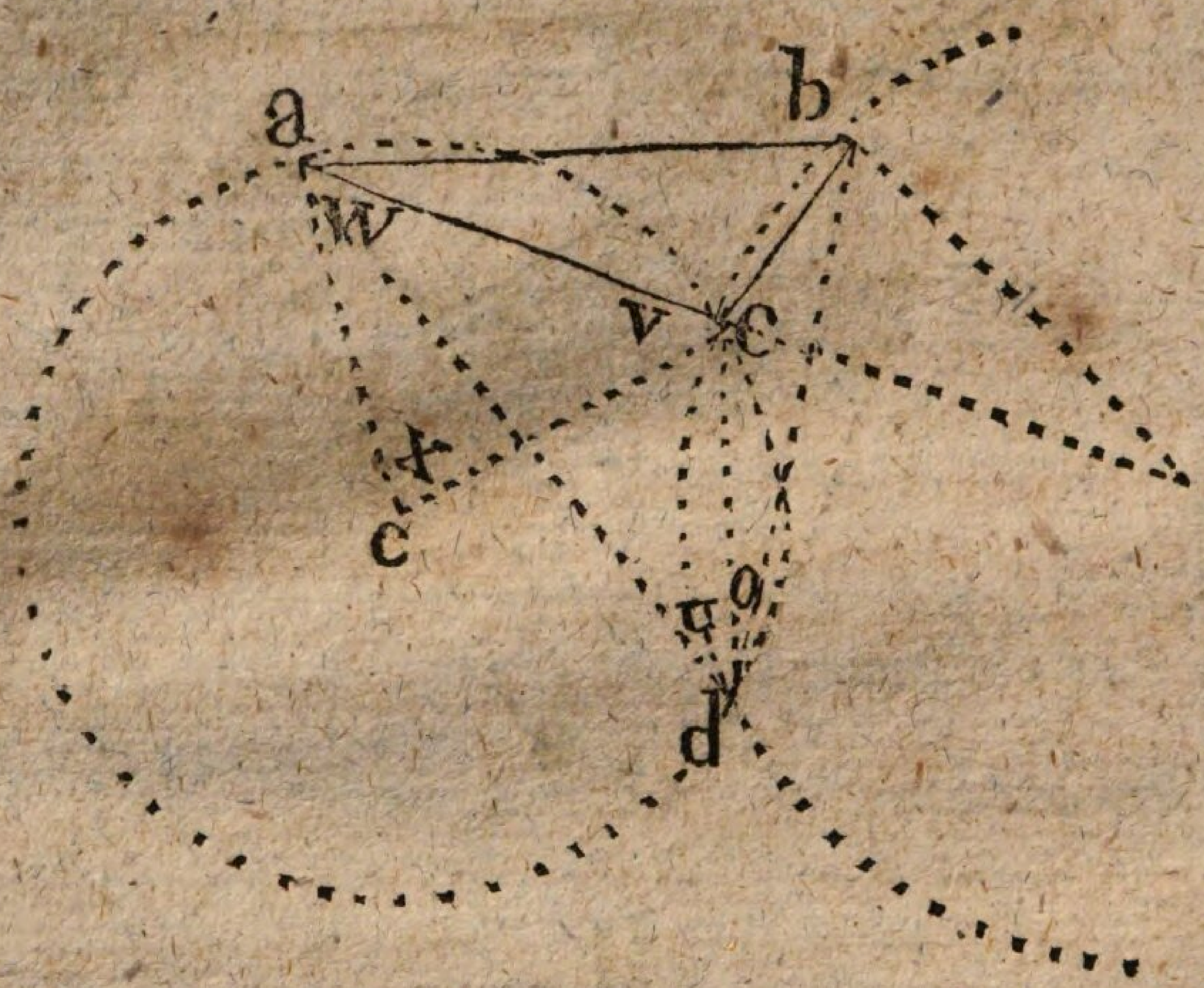


In diesem Dreiecke abc sind die Seiten ab, ac und bc bekannt. Von dem Punkte d aus können die Winkel u und o gemessen werden. Wie wäre nun wol die Entfernung von d nach a, c und b zu finden?

Wir haben hier zwei Dreiecke acd und bcd erhalten, indem wir uns die Schenkel der Winkel u und o bis an a, c und b verlängert gedenken.

Eben so können wir uns auch diese Dreiecke mit Kreisen so umschrieben gedenken, daß die Punkte a, c und d, und b, c und d in Peripherien liegen.

Wir wollen uns dies erst durch eine Figur veranschaulichen.



Was für Winkel sind nun u und o in Absicht der Kreise?

Peripheriewinkel.

Und auf welchen Bögen stehen sie?

Sie stehen auf den Bögen, deren Sehnen a c und b e sind.

Wie groß ist nun der Centriwinkel in Vergleichung mit ∠u, da beide mit ihren Schenkeln auf der Sehne a c stehen?

Der Centriwinkel ist doppelt so groß, als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf einerlei Sehne steht.

Und wie erhalten wir daraus nun die Größe der Winkel v und w? —

Was ist aec für ein Dreieck, weil die Schenkel ea und ec Halbmesser des Kreises sind?

Wie verhalten sich daher die Winkel an der Grundlinie v und w?

Da nun der Winkel x schon gefunden ist, wie erhalten wir denn die Größe von v und w?

Diese Winkel setzen wir nun vermittelst eines Transporteurs an beide Enden der Linie ac, so müssen sich die Schenkel dieser Winkel in e durchschneiden, und wenn darauf mit ae aus e ein Kreis beschrieben wird: so ist nun ein jeder Winkel an der Peripherie in diesem Kreise, welcher auf der Sehne ac steht, dem ∠u gleich; und es wird also der Punkt d irgendwo in dieser Peripherie fallen müssen.

Auf gleiche Weise verfahren wir nun auf der Gegenseite mit dem Winkel o. Construiren wir nun die Dreiecke nach einem richtigen Maaßstabe aus den gegebenen Stücken: so können die Weiten ad, cd und bd nach eben dem Maaßstabe gemessen werden.

Bei dieser Auflösung haben wir keine trigonometrische Sätze benutzt. Wollen wir die Aufgabe aber trigonometrisch lösen, so werden wir eher damit zu Stande kommen.

Welche Linien wollen wir eigentlich suchen?

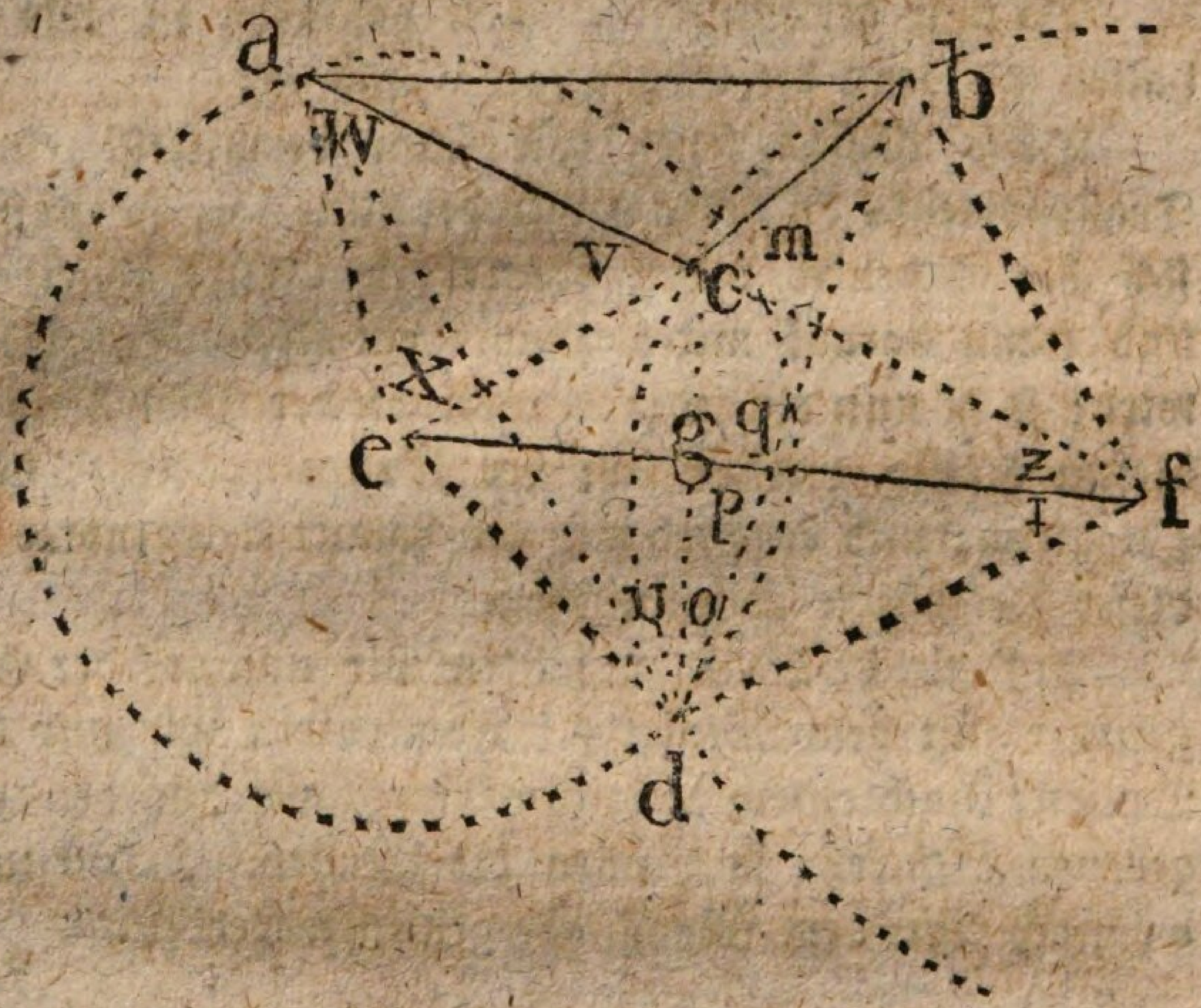
da, dc und db.

Welche Stücke sind uns in dem Dreiecke acd bekannt?

Die Seite ac und ∠u.

Könnten wir nun noch die Größe von einem Winkel mehr erhalten, so würden wir daraus trigono-

metrisch die übrigen unbekannten Stücke, also auch die Länge von da und dc u. s. w. folgern können. Deswegen müssen wir noch eine Hülfslinie ef ziehen, und von e und f nach unserm Standpunkte d.



Welche Stücke sind in dem Dreiecke acd bekannt?

Hieraus können nun die Halbmesser ec und ea gefunden werden.

Da alle Winkel um einen gemeinschaftlichen Punkt zusammen genommen 360° ausmachen, so müssen die Winkel rund um den Punkt c auch 360° enthalten,

Und wenn nun der Winkel acb gegeben oder vermittelst der drei gegebenen Seiten gefunden ist: so läßt sich nun die Größe des Winkels ecf bestimmen; und dann können in dem Dreiecke ecf die Winkel y und z berechnet werden

Nun vergleiche die beiden Dreiecke ecf und fd• mit einander, worin kommen diese überein?

Sie haben 3 gleiche Seiten, nemlich ꝛc. ꝛc.

Was können wir denn von ihnen behaupten?

Daß beide Dreiecke congruent sind.

Und was folgt hieraus wieder für die gleichnamigen Theile?

So sind auch die gleichnamigen Theile einander gleich.

Welcher Theil ist aber gleichnamig mit Winkel z?

∠t.

Eben so vergleichen wir jetzt die Dreiecke fcg und fdg mit einander; worin kommen sie überein?

Sie haben 2 gleiche Seiten und einen davon eingeschlossenen gleichen Winkel.

Was können wir deswegen von den Dreiecken behaupten?

So sind die Dreiecke congruent.

Und was folgt wieder hieraus für die gleichnamigen Theile?

Daß sie sich auch gleich sind.

Welcher Winkel ist denn mit q gleichnamig?

Der Winkel p.

Und wie groß muß jeder seyn, da sie auch Nebenwinkel sind?

90°.

Das Dreieck fcg ist also ein rechtwinklichtes Dreieck.

Jetzt kennen wir 2 Winkel, und also auch 3 in diesem rechtwinklichten Dreiecke.

Welchen Winkel erhalten wir nun, wenn wir diesen letztgefundenen dcf zu fcb addiren?

So erhalten wir ∠dcb.

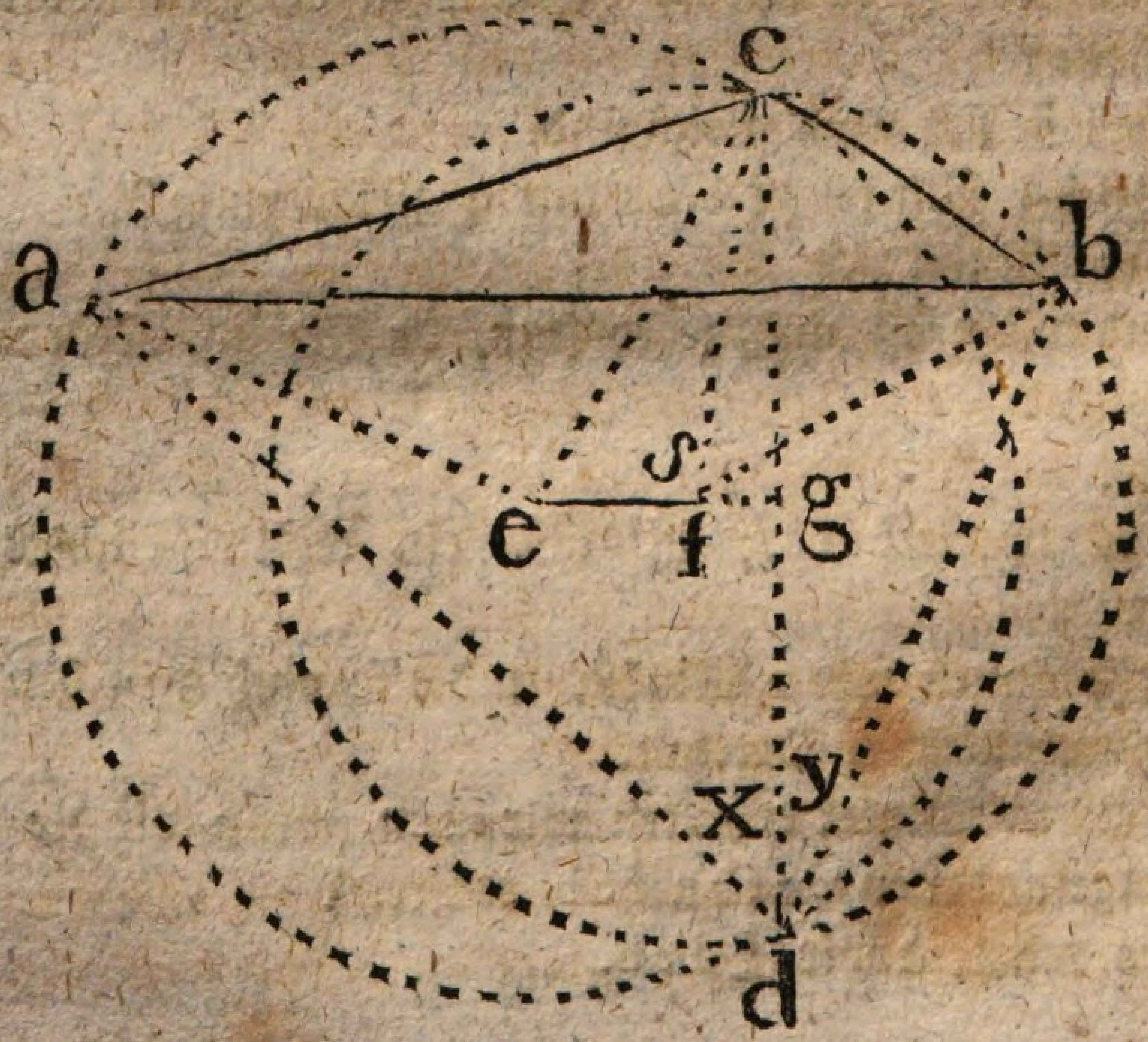
Folglich haben wir in dem Dreiecke dcb eine Seite und 2 Winkel als bekannte Stücke; woraus wir nun die übrigen unbekannten Stücke, also auch cd und bd trigonometrisch berechnen können.

Auf gleiche Weise kann auf der Gegenseite die Entfernung ad berechnet werden.

Aber es könnte eingewendet werden, die 3 genannten Oerter: Wöhren, Wesselburen und Neuenkirchen haben nicht die, nach der Figur, bestimmte Lage gegeneinander, sondern der mittelste Ort, hier c genannt, liegt jenseits der Linie ab.

Z. B. s. Fig. Im Dreiecke acd haben wir als bekannt die Seite ac und ∠x. Wenn wir noch einen Winkel z. B. ∠acd hätten, so wäre es hinlänglich, um das Uebrige zu finden.

∠acd = ace + ecf + fcd.



Also erstens die Größe von a c e. —

Diese erhalten wir, wie im eben vorhergehenden Satze, nemlich ∠x doppelt = a e c.

Und da a e c ein gleichschenklichtes Dreieck ist, was folgt daraus für die beiden Winkel an der Grundlinie a c?

So folgt, daß diese Winkel sich gleich sind.

Ziehen wir also von 180° den Winkel a e c ab, und halbiren den Rest; so erhalten wir den Winkel a c e.

Nun wollen wir 2tens die Größe von b c d suchen. —

Die erhalten wir gerade eben so, wie den ebengefundenen Winkel a c e.

Und nun 3tens —

Da uns die Größe von a c b bekannt ist, so brauchen wir nur erst diese gefundenen Winkel a c e + ∠b c d zu subtrahiren von a c b, so bleibt die Größe von e c d nach.

Haben wir darauf den Winkel s gesucht, und von 180° subtrahirt, so erhalten wir den Winkel c f g. Diesen ziehen wir wieder von 90° ab, um den Winkel f c g zu erhalten; und hieraus endlich den Winkel e c f.

Jetzt haben wir also alle drei spitzige Winkel, die zusammen den Winkel a c d bilden, und nun bekannte Stücke genug, um trigonometrisch die unbekannten — also auch die Entfernung von d nach a, und von d nach c zu finden.

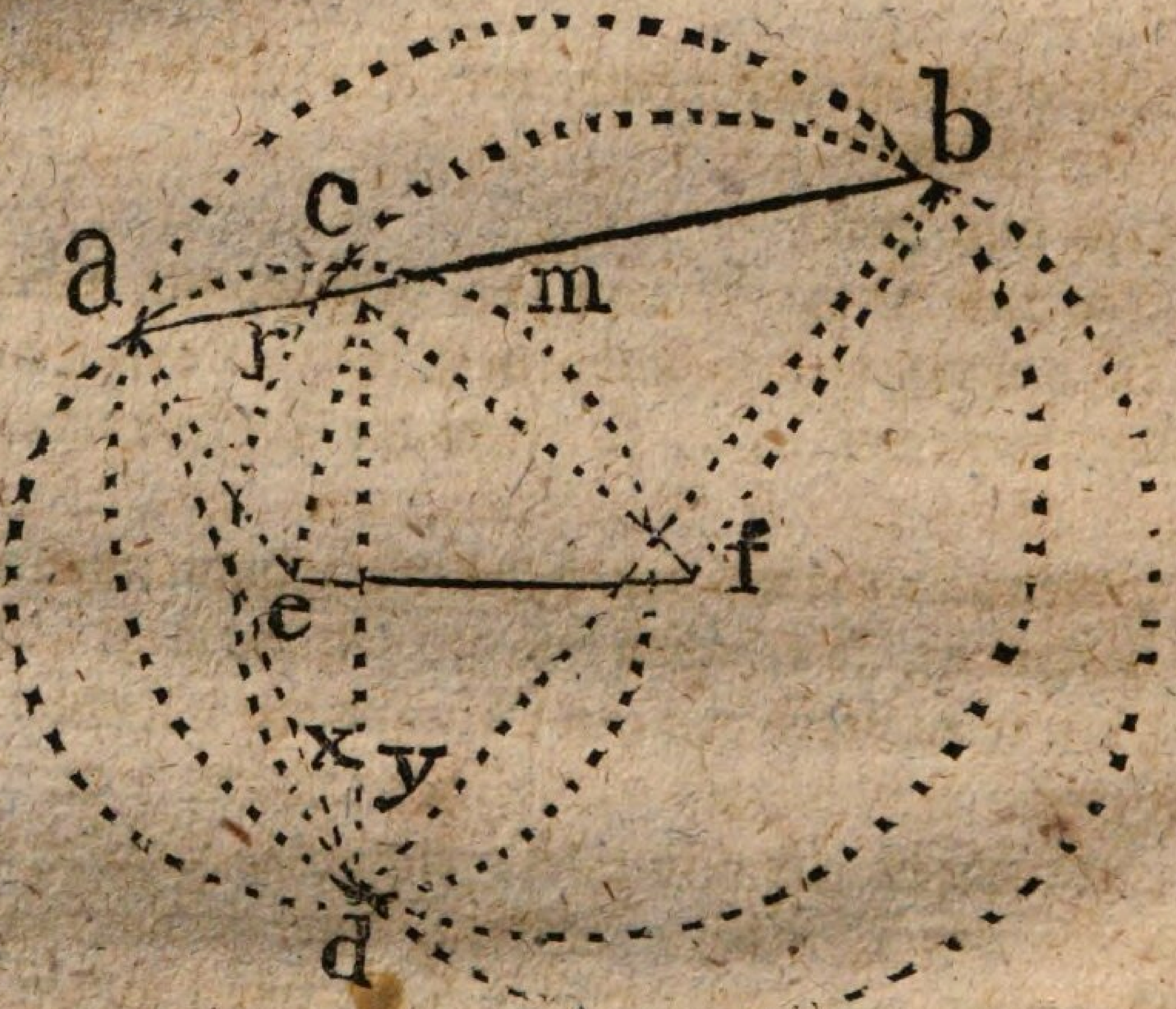
Auf gleiche Weise wird in dem Dreiecke b c d aus der Seite c b und den Winkeln b c d und y, die Entfernung von d nach b gefunden.

Wie aber, wenn die 3 Oerter in einer geraden Linie sich befänden.

z. B.

Wir müssen — so wie im 1sten Falle — eine Linie z. B. ef ziehen.

Von unserm gewählten Standpunkte d können wir nach a, c und b visiren, und so die Winkel x und y erhalten.



Welche bekannte Stücke haben wir nun in dem Dreiecke acd?

Was fehlt uns denn noch, um die unbekannten Stücke, also auch da und dc zu erhalten?

So auch in dem andern Dreiecke bcd, welche bekannte Stücke haben wir?

Und welche fehlen uns?

Diese wirst du nun leicht selbst finden, wenn ich dich nur erinnere, daß alle Nebenwinkel über einer geraden Linie 180° zusammen ausmachen; folglich:

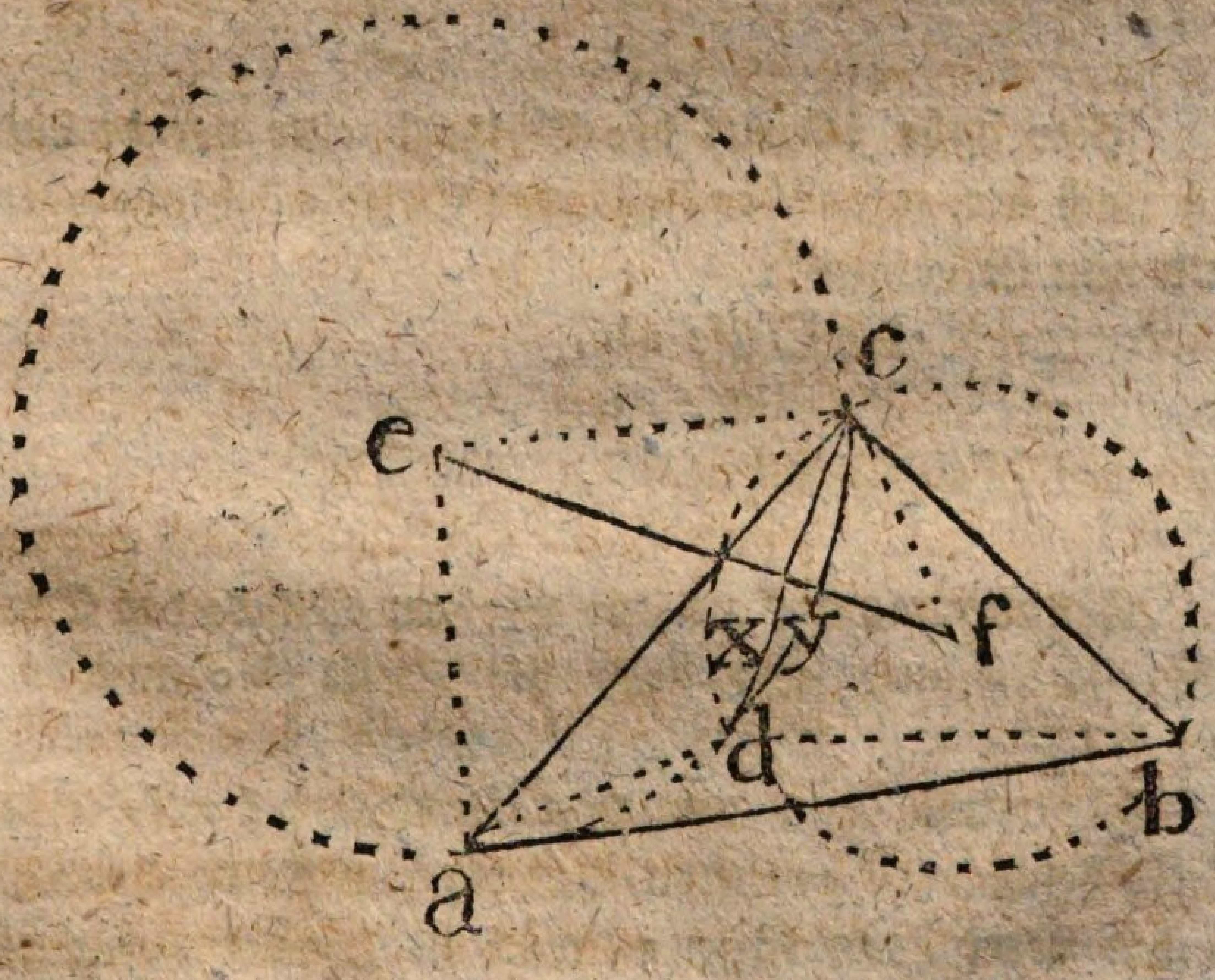
$$\angle r + ecf + m = 180°.$$

$\angle r$ ist ein Winkel in einem gleichschenklichten Dreiecke, den wir ja vermittelst des Winkels aec, der das Doppelte von $\angle x$ ausmacht, leicht finden können.

Und mit $\angle m$ ist es eben so.

Es ist nun endlich auch noch der mögliche Fall, daß der Standpunkt d innerhalb dem Dreiecke acb läge, wie

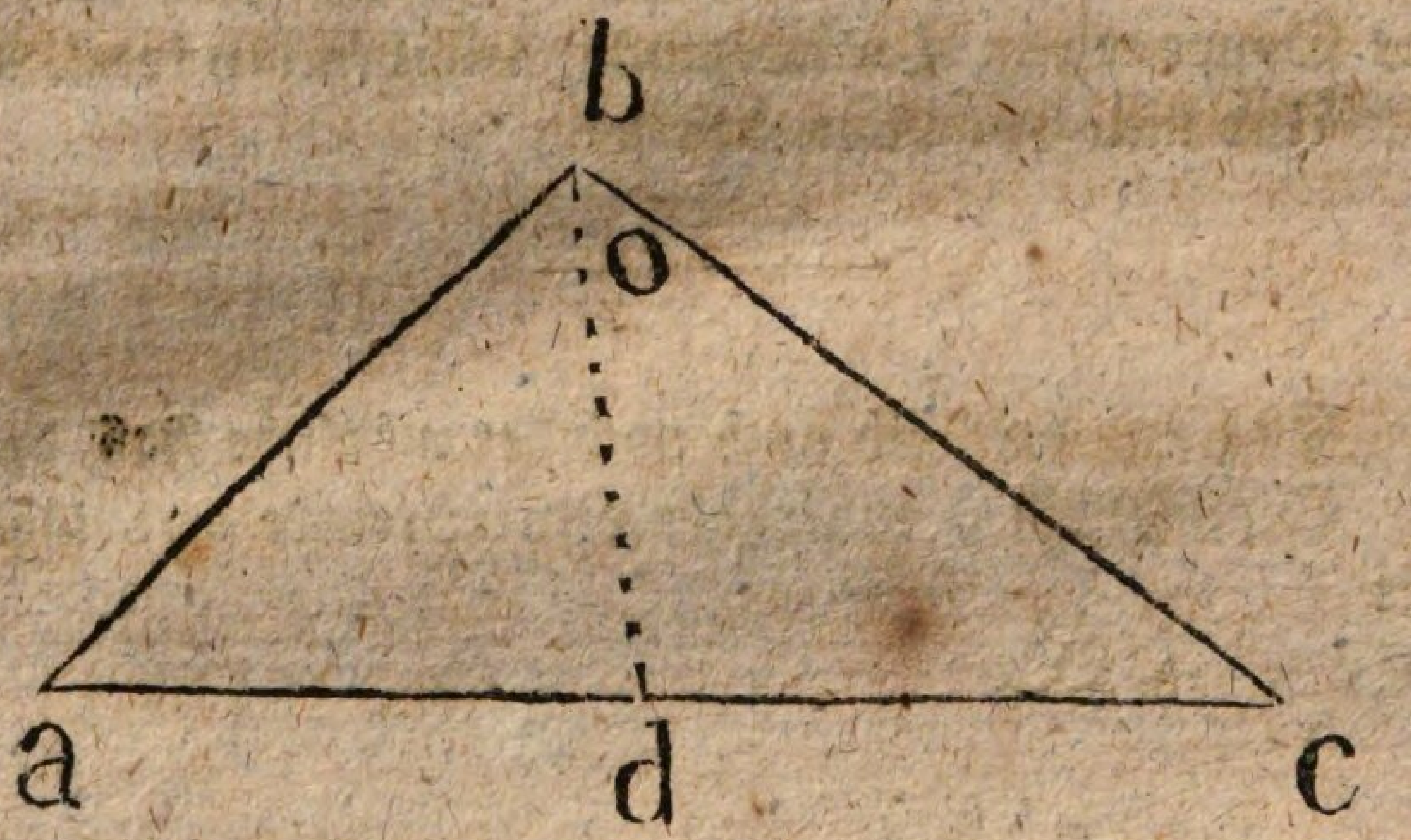
z. B.



Nachdem wir von d nach a und nach c visiret haben, können wir den Peripheriewinkel x bestimmen. Hieraus die Größe des Centriwinkels erhalten.

Und so weiter wieder die Größe eines jeden Winkels an der Grundlinie des gleichschenklichten Dreieckes a e c.

Aufgabe 7.



Hier habe ich aus der Spitze b eine gerade Linie b d nach der gegenüber stehenden Seite a c hingezogen, und nun ist bekannt:

die Seite a b,
die Seite a c;
auch der Theil derselben a d,
und ∠ o.

Können wir daraus die übrigen Stücke des Dreieckes a b c, und also auch die Seite b c und b d finden? —

Wenn wir uns um das Dreieck b d c so einen Kreis beschrieben gedenken, daß die Punkte b, d und c in der Peripherie liegen; was ist ∠ o denn für ein Winkel?

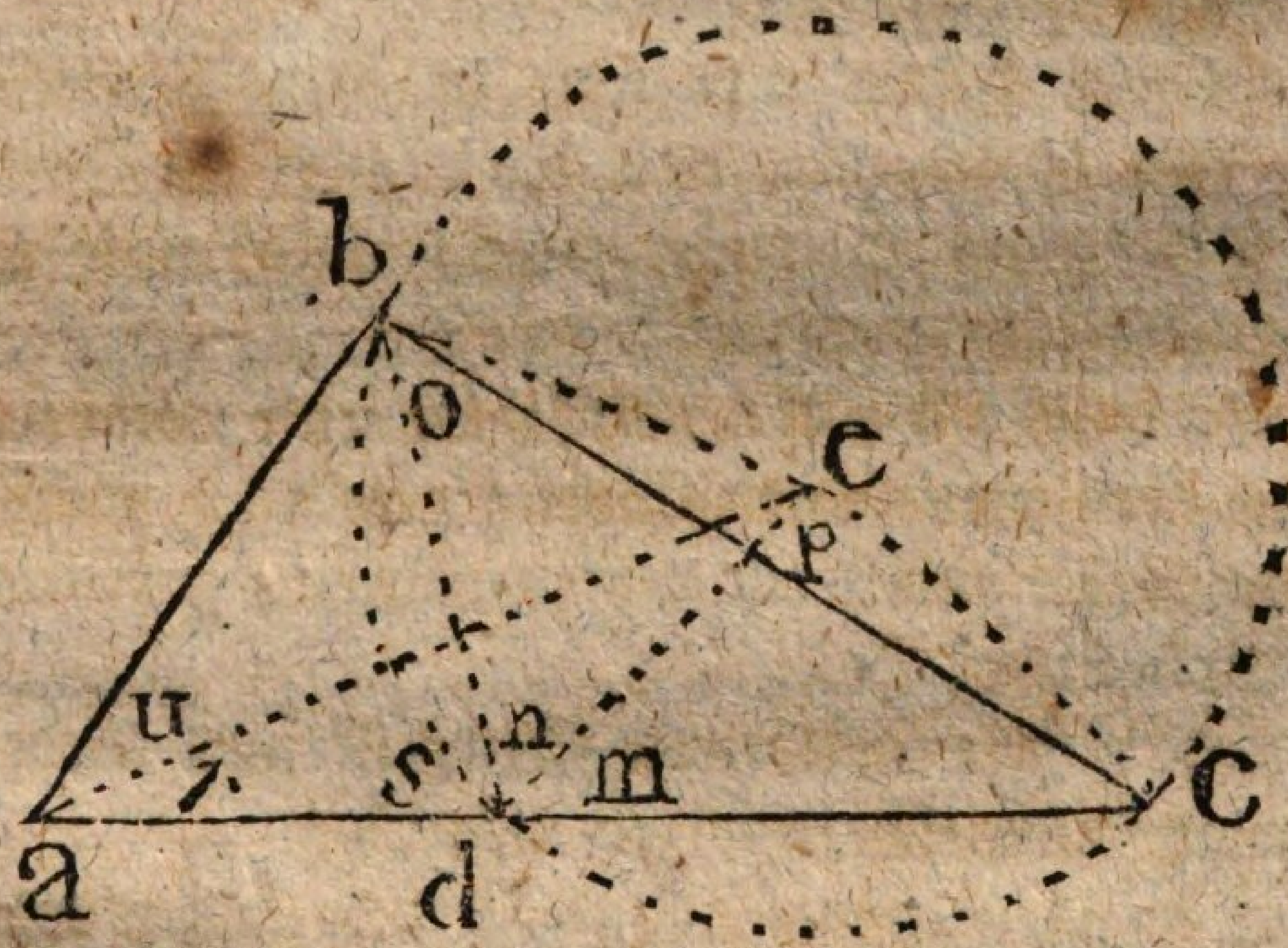
Auf welchem Bogenstücke steht er mit seinen beiden Schenkeln?

Wenn nun ein Centriwinkel in diesem Kreise auf demselben Bogenstücke steht; wie muß er sich denn zu dem Peripheriewinkel o verhalten?

Da nun, nach der Voraussetzung, Winkel o bekannt ist, welchen Winkel können wir nun auch dadurch bestimmen?

Wie erhalten wir nun die beiden andern Winkel des Dreieckes, worin der Centriwinkel sich befindet?

Setzen wir nun, vermittelst eines Transporteurs, die Größe dieser beiden Winkel an beide Enden der Grundlinie d c; wo werden sich denn die Schenkel dieser Winkel durchschneiden?



Die beiden Schenkel durchschnitten sich in dem Mittelpunkte des Kreises, e genannt.

Darauf zogen wir die Linie a e, und den Halbmesser b e.

Erinnere dich nur erst, was wir eigentlich suchen.

Um die Linie b c und b d trigonometrisch zu berechnen, was ist uns dazu bekannt?

Und was fehlt uns dazu?

Da in dem Dreiecke dec die Seite dc, und die Winkel p und m bekannt sind; welche Linien können daraus berechnet werden?

Die Halbmesser ce, de und be.

Auch haben wir hier 3 über einer geraden Linie neben einander liegende Winkel; wie viele Grade enthalten diese zusammen genommen?

Weil nun ∠m bekannt ist; welche Winkel können wir denn auch bestimmt erhalten?

Welche bekannte Stücke haben wir nun also in dem Dreiecke ade?

Und welche unbekannte Stücke können wir daraus trigonometrisch finden?

Folglich haben wir nun in dem Dreiecke abe außer den Seiten ab und be, auch die Seite ae; also 3 bekannte Seiten; welche unbekannte Stücke können wir daraus wieder finden?

So fanden wir den Winkel u, und wenn wir dazu den eben gefundenen Winkel r geben, welche bekannte Stücke haben wir denn zusammen genommen in dem Dreiecke abd?

Und welche unbekannte Seite ist uns wieder daraus trigonometrisch zu finden möglich?

Eben so, welche bekannte Stücke haben wir nun in dem Dreiecke abc?

Und welche können wir endlich daraus finden?

Wenn also aus der Spitze b eine gerade Linie bd nach der gegenüber stehenden Seite ac hingezogen wird, und bekannt ist: die Seite ab, die Seite ac und das Stück davon ad, und ∠o, so können wir daraus die übrigen Stücke, und also auch die Seite bc und bd finden.

Von den Logarithmen.

§. 1.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 u. s. w.

Diese Reihe Zahlen steigt nach und nach um das Doppelte, und wenn man ein Glied durch das zunächst vorhergehende dividirt: so erhält man die Zahl 2. Ist nun das allgemeine Gesetz, nach welchem eine Reihe Zahlen zu- oder abnimmt, dieses, daß nemlich überall einerlei Quotient entsteht, wenn ein Paar auf einander folgende Glieder durch einander dividirt werden, so heißt eine solche Reihe eine geometrische Progression.

Die beiden ersten Glieder (Zahlen) 1 und 2, machen das erste Verhältniß aus.

Ferner 2 und 4, das 2te Verhältniß,
4 — 8, — 3te —
8 — 16, — 4te — u. s. w.

Wir wollen durch Zahlen die Verhältnisse zählen, und sie unter die Glieder der geometrischen Progression setzen:

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128 u. s. w.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7 —

So ist die unterste Reihe eine Reihe Zahlen, die nach dem Gesetze fortgehet, daß immer zwei zunächst auf einander folgende Zahlen einerlei Unterschied haben, und eine solche Reihe nennt man eine arithmetische Progression.

Wir haben hier eine geometrische und eine arithmetische Progression mit einander in Verbindung gesetzt.

Die geometrische fängt mit 1 an; und die arithmetische mit 0; und letztere hat zum Unterschiede der Glieder 1.

Die Glieder der arithmetischen Progression zeigen die Anzahl der Verhältnisse in der geometrischen Progression an; zählen die Verhältnisse und heißen daher Verhältnißzähler, oder mit einem griechischen Namen Logarithmen.

z. B.

Geom. Progr.	1.	4.	16.	64.	256.	1024	u. s. w.
Logarithmen	0.	1.	2.	3.	4.	5	—

Der Quotient, welchen man in der geometrischen Progression erhält, wenn man ein Glied durch das zunächststehende dividirt, heißt der Exponent.

Hier in diesem Beispiele ist er 4; im vorigen war er 2.

Dieses letzte Beispiel ließe sich auch so darstellen:

Geom. Progr.	1.	4^1.	4^2.	4^3.	4^4.	4^5	u. s. w.
Logarithmen	0.	1.	2.	3.	4.	5	—

Hieraus sieht man, daß die Zahlen der arithmetischen Progression mit den Exponenten der Potenzen in der geometrischen Progression einerlei sind, und so sind diese Exponenten zugleich die Logarithmen ihrer Potenzen.

Eine geometrische Progression mit den Logarithmen heißt ein logarithmisches System, und die Zahl, deren Potenzen wir nehmen (im letztern Beispiele 4, im vorigen 2), heißt dessen Grundzahl (Basis.).

Das jetzt gebräuchlichste und zu den gewöhnlichen Rechnungen bequemste Logarithmen-System ist, dessen Grundzahl 10 ist.

Zahlen; 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 u. s. w.
Logarithmen: 0. 1. 2. 3. 4. 5 —

Läßt man die Progression fallen, so ist das Folgende die Fortsetzung mit negativen Logarithmen.

10. 1. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{100}$. $\frac{1}{1000}$ u. s. w.
Logarithmen 1. 0. 1. 2. 3 —

Die gewöhnliche Bezeichnung der Logarithmeu ist log. z. B.

log. von 1000 = 3.

§. 2.

Betrachten wir die aufgeführten Beispiele geometrischer Progressionen noch einmal etwas genauer, so werden wir leicht bemerken, daß die zunächst auf einander folgenden Glieder eine geometrische Proportion ausmachen. Z. B.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 u. s. w.
1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 —
1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096 —

Es verhält sich:

2 : 4 = 8 : 16 u. s. w.
27 : 81 = 243 : 729 —

aber auch:

1 : 4 = 2 : 8
3 : 81 = 9 : 243
16 : 256 = 64 : 1024 u. s. w.

Also auch die Glieder, welche gleichweit von einander entfernt sind, machen eine geometrische Propor-

tion, weil die Glieder auf einerlei Art durch die Multiplication oder Division auseinander gemacht werden.

§. 3.

So auch in der arithmetischen Progression, z. B.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15 u. s. w.
1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22 —
1. 5. 9. 13. 17. 21. 25. 29 —

Es verhält sich:

1 : 3 = 5 : 7
4 : 7 = 10 : 13
13 : 17 = 21 : 25

aber auch:

1 : 7 = 3 : 9
4 : 16 = 7 : 19
5 : 13 = 9 : 17 u. s. w.

Also die Glieder einer arithmetischen Progression, welche zunächst aufeinander folgen, so wie auch diejenigen Glieder, welche gleichweit von einander entfernt stehen, haben einerlei arithmetisches Verhältniß, weil sie auf einerlei Art aus einander entstanden sind.

Geom. Progr. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64 u. s. w.
Arithm. Progr. 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6 —

Hier stehen die Logarithmen in einer arithmetischen Proportion; sowol die zunächst auf einander folgenden, als die, welche gleichweit von einander entfernt sind.

Und weil in jeder arithmetischen Proportion sich verhält das 1ste Glied zum 2ten, wie das 3te zum 4ten: so findet man das 4te Glied aus den 3 erstern, wenn man das 2te und 3te Glied zusammen addirt, und von dieser Summe das 1ste Glied abzieht, z. B.

1 : 2 = 3 : 4.
2 : 5 = 3 : 6.

Deswegen erhält man auch den Logarithmus der vierten geometrischen Proportionalgröße, wenn man die Logarithmen des 2ten und 3ten Gliedes zusammen addirt, und hiervon den Logarithmus des ersten Gliedes abzieht, z. B.

2 : 4 = 8 : 16.

Man findet hier das vierte Glied, nemlich 16, wenn man die Logarithmen des zweiten und dritten Gliedes, nemlich 2 und 3 zusammen addirt = 5, und hiervon den Logarithmus des 1sten Gliedes nemlich 1 subtrahirt = 4. Diese Zahl 4 ist also der Logarithmus der vierten geometrischen Proportionalgröße.

Diesen Satz wollen wir einmal bei einer gewöhnlichen Regel de tri Aufgabe anwenden, z. B. den Preis von 128 Pfund einer Waare berechnen, wenn 2 Pfund derselben 8 Mark gelten.

2 Pfund : 8 Mark = 128 Pfund : zum 4ten Gliede
1 : 4
512 Mark.

Mit Logarithmen:

log. 8 + log. 128 — log. 2 = dem 4ten Gliede.
Nun ist log. 8 = 3
und log. 128 = 7
log. 8 + log. 128 = 10
log. 2 = 1

log. 8 + log. 128 — log. 2 = 9, ist also der Logarithmus des vierten Gliedes.

Nimmt man diesen Logarithmus nun in der oben angeführten Reihe, so findet man, daß er der Logarithmus von 512 ist, welches also das 4te Glied seyn muß.

Wir haben hier nicht multiplicirt, sondern statt dessen die Logarithmen addirt; wir haben nicht dividirt, sondern die Logarithmen subtrahirt.

So verwandelt sich also, vermittelst der Logarithmen, das Multipliciren in Addiren; das Dividiren in Subtrahiren.

Wenn man also z. B. 16 mit 64 multipliciren sollte, so könnte man das Produkt durch Hülfe der Logarithmen erhalten, indem man ihre Logarithmen addirt, und diese Summe in der logarithmischen Tabelle aufsucht. Die dazu gehörige Zahl müßte das verlangte Produkt seyn.

log. 16 = 4, nach dem oben aufgestellten System, dessen Grundzahl 2 ist.
log. 64 = 6

10 = log. 1024.

1024 muß also das Produkt von 16 × 64 seyn, welches auch die Probe hält.

§. 4.

Wenn man nun diese letztgefundene Zahl 1024 zum Quadrat erheben sollte, oder welches einerlei ist, mit sich selbst multiplicirt 1024 × 1024; so würde man demnach den Logarithmus 10 und 10 addiren, oder 10 doppelt nehmen müssen; 20 würde also der Logarithmus des Quadrats, und die dazu gehörige Zahl, die verlangte Quadratzahl seyn.

Es folgt hieraus umgekehrt sehr leicht, daß wenn man aus 1024 die Quadratwurzel verlangt, man nur den halben Logarithmus von 10, nemlich 5 in der Tabelle aufzusuchen hat, wo die Zahl 32 die Quadratwurzel aus 1024 seyn muß.

Also der Logarithmus einer Quadratzahl muß noch einmal so groß seyn, als der Logarithmus der Wurzel; und der Logarithmus der Wurzel halb so groß, als der Logarithmus der Quadratzahl.

Auf eben die Weise müßte man verfahren, wenn man 64 zur Cubikzahl erheben sollte. D. h. wir sollten $64 \times 64 \times 64$ multipliciren, und das wäre — (s. oben —) $\log. 6 + \log. 6 + \log. 6 = 18$ unter den Logarithmen aufzusuchen.

Sollte nun umgekehrt aus einer größern Zahl die Cubikwurzel gesucht werden, so nehme man den dritten Theil von dem Logarithmus derselben, die dazu gehörige Zahl ist die Cubikwurzel.

Also ist der Logarithmus einer Cubikwurzel der dritte Theil von dem Logarithmus der Cubikzahl.

Und der Logarithmus einer Cubikzahl das Dreifache von dem Logarithmus der Cubikwurzel.

§. 5.

Nach unserm obigen Hauptsatze verwandelt sich das Dividiren in Subtrahiren, vermittelst der Logarithmen. Hätten wir also z. B. 1024 durch 64 zu dividiren, so könnten wir erst ihre Logarithmen in den Tabellen suchen, diese von einander subtrahiren, der Rest würde der Logarithmus des Quotienten, und die dazu gehörige Zahl der Quotient selbst seyn, z. B.

$$\log. 1024 = 10$$
$$\log. \quad 64 = 6$$

$$1024 : 64 = 10 - 6 = 4.$$

L 2

4 ist also der Logarithmus des Quotienten, die dazu gehörige Zahl 16 der Quotient selbst, und dies hält auch die Probe:

$$\frac{1024}{64} = 16.$$

Subtrahirt man also den Logarithmus des Divisors von dem Logarithmus des Dividendi, so erhält man den Logarithmus des Quotienten.

§. 6.

4 soll ich z. B. dividiren durch $5 = \frac{4}{5}$
17 „ „ „ durch $19 = \frac{17}{19}$.

Der Bruch im Rechnen ist also der Ausdruck einer Division, wo der Zähler den Dividendus, der Nenner aber den Divisor vorstellet; und dieses Dividiren kann auch, vermittelst der Logarithmen, in Subtrahiren verwandelt werden, nemlich wir subtrahiren den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers. Bei ächten Brüchen sind die Logarithmen negativ, z. B.

$$\log.\tfrac{2}{3} = \log.2 - \log.3 = 0{,}301030 - 0{,}477121 = -0{,}176091.$$

§. 7.

1. 10. 100. 1000. 10000. 100000 u. s. w.
0. 1. 2. 3. 4. 5 —

Also der Logarithmus von 1 ist 0, und von 10 ist er 1. Die Zahlen nun, welche zwischen 1 und 10 sind, als 2, 3, 4, 5 2c., müssen einen Logarithmus

haben, der mehr als 0, und weniger als 1 ist; folglich einen ächten Bruch.

Ferner die Zahl 10 hat 1 zum Logarithmus; 100 hat 2; folglich müssen die Zahlen zwischen 10 und 100 die Einheit nebst einem Bruche zum Logarithmus haben.

So auch 100 hat 2 zum Logarithmus; 1000 aber 3; folglich haben die Zahlen zwischen 100 und 1000 2 nebst einem Bruche zum Logarithmus, und dieser Bruch wird größer, je mehr die Zahlen sich 1000 nähern.

Hieraus kann man nun leicht angeben, wie viele Ganzen (Kennziffern) die Logarithmen der Zahlen von 10,000, 100,000 ꝛc. haben.

In den gewöhnlichen Tafeln hat man diesen Bruch bis auf sieben Decimalstellen, und in einigen noch genauer berechnet.

§. 8.

Nach den Tabellen ist
der Logarithmus von 39 = 1.5910646
der Log. — 390 = 2.5910646
und der Log. — 3900 = 3.5910646.

Aus diesen Beispielen und aus mehreren ähnlichen, die wir leicht aus der Tabelle nehmen können, sehen wir, daß der Logarithmus (die Kennziffer) genau um eine ganze Einheit zunimmt, wenn die Zahl 10 mal so groß ist, als die einfache Zahl, und der Logarithmus um 2 Einheiten zunimmt, wenn die Zahl 100 mal so groß ist u. s. w. Die Decimalbrüche sind dieselben.

§. 9.

So auch umgekehrt:

$$3.2586373 = \log. 1814$$

folglich $2.2586373 = \log. 181{,}4$

und $1.2586373 = \log. 18{,}14$

so wie auch $0.2586373 = \log. 1{,}814$

Beweis:

$$\begin{array}{r} 3.2586373 = \log. 1814 \\ 1.0000000 = \log. \quad 10 \\ \hline 2.2586373 = \log. \tfrac{1814}{10} = \log. 181{,}4. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.2586373 = \log. 1814 \\ 2.0000000 = \log. \quad 100 \\ \hline 1.2586373 = \log. \tfrac{1814}{100} = \log. 18{,}14. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.2586373 = \log. 1814 \\ 3.0000000 = \log. 1000 \\ \hline 0.2586373 = \log. \tfrac{1814}{1000} = \log. 1{,}814. \end{array}$$

Also die Logarithmen nehmen genau um eine ganze Einheit ab, wenn die Zahl 10 mal so klein ist, als die einfache Zahl. Eben so nehmen sie um 2 Einheiten ab, wenn die Zahl 100 mal so klein ist, u. s. w. Die Decimalbrüche bleiben unverändert.

§. 10.

Wenn man also zu 12,34 den Logarithmus finden sollte, so kann man den Logarithmus zu der Zahl als lauter Ganzen, nemlich zu 1234 in den Tabellen nehmen.

$$\log. 1234 = 3.0913151.$$

Weil in der gegebenen Zahl 2 Ziffern Decimalbrüche sind, so hat man sie 100 mal größer genommen. Es müssen also 2 Ganzen subtrahirt werden; folglich

log. 12,34 = 1.0913151.

Wäre der Bruch kein Decimalbruch, so könnte man ihn in einen solchen verwandeln, z. B. $\frac{3}{4} = 0.75$.

Man findet also den Logarithmus zu einer gemischten Zahl, wenn man den Bruch in einen Decimalbruch verwandelt, und ihn dann als eine ganze Zahl betrachtet, darauf zu dieser ganzen Zahl den Logarithmus aufsucht, und 1 davon subtrahirt, wenn die gegebene Zahl 10 mal genommen ist; 2, wenn sie 100 mal genommen ist, u. s. w.

Oder:

man verwandelt den gemischten Bruch in einen unächten, z. B. $12\frac{5}{6} = \frac{77}{6}$ = log. 77 — log. 6 = 1.8864907 — 0.7781512 = 1.1083395.

§. 11.

Wir haben vorher gehabt, daß die zunächst auf einander folgende Zahlen in einer geometrischen Progression, und auch die, welche gleichweit von einander abstehen, in einer geometrischen Proportion sich befinden, z. B. 1 : 100 = 100 : 10,000.

Hieraus folgt, daß das Produkt der beiden äußern Glieder $1 \times 10{,}000 = 100 \times 100 = 100^2$ gleich dem Produkte der beiden mittlern.

Also die mittlere geometrische Proportionalzahl ist 100.

Diese können wir finden, wenn wir das erste und 4te Glied mit einander multipliciren, und aus dem Produkte die Quadratwurzel nehmen. Folglich würden wir auch die mittlere geometrische Proportionalzahl zwischen 1 und 10 finden, wenn wir die Quadratwurzel aus dem Produkte dieser Größen, nemlich aus 10 ziehen. Da nun 10 eine Zahl ist, deren Quadratwurzel sich nicht in Ganzen angeben läßt: so hat man eine gewisse Anzahl Nullen, z. B. 7 angehängt, d. h. in Decimalbrüchen gerechnet, um sich dem Werthe der Größen desto mehr zu nähern.

$\sqrt{10{,}0000000} = 3.1622776.$

Ferner die mittlere geometrische Proportionalgröße zwischen 1 und 3,1622776 findet man wieder, indem man 1 × 3.1622776 multiplicirt, und aus dem Produkte die Quadratwurzel ziehet, ist 1.7782794; und so weiter zwischen 1 und 1.7782794 ist 1.3335214.

So fährt man nun mit dem Einschieben mittlerer Glieder fort. Je mehr Decimalstellen man berechnet, desto genauer wird es.

Nun hat man auch zwischen den Logarithmen 1 und 10, d. i. zwischen 0,0000000 und 1,0000000 eben so viele arithmetische Proportionalzahlen gesucht, und diejenigen, welche zu den vorigen mittlern geometrischen gehörten, wurden nun die Logarithmen derselben, nemlich: wir wissen, daß die Summe des 1sten und vierten Gliedes einer arithmetischen Proportion gleich ist der Summe des 2ten und 3ten Gliedes,

z. B. 0 : 2 = 2 : 4.

Um also hier die mittlere Proportionalzahl zwischen dem ersten und vierten Gliede zu finden,

braucht man nur die Summe dieser beiden Größen durch 2 zu dividiren.

Die beiden Logarithmen, zwischen welchen wir die mittlere arithmetische Proportionalzahl finden wollen, sind

0.0000000
und 1.0000000
Summe 1.0000000
2) ———
0.5000000.

So haben wir also den Logarithmus zu
3.1622776.

Ferner 0.5000000
0.0000000
———
0.5000000
2) ———
0.2500000 = log. 1.7782794.

Und 0.2500000
0.0000000
———
0.2500000
2) ———
0.1250000 = log. 1.3335214.

u. s. w.

Auf diese Weise konnte man also die Logarithmen aller Primzahlen finden. Es kann noch auf eine andere, und zwar kürzere Art geschehen; doch möchte ich, um diese gehörig deutlich zu machen, zu weitläufig werden.

Die Logarithmen solcher Zahlen aber, die sich in ganze Faktoren zerlegen lassen, kann man geschwinder und auf einem weniger mühsamen Wege finden, z. B.

Wir wüßten, daß der Logarithmus

von 6	= 0.7781512,
und von 8	= 0.9030900.

so ist log. $6 \times 8 = 48 = 1.6812412$, denn die Logarithmen sind — wie wir vorher gehabt haben — nichts anders, als Exponenten zu Potenzen, und wenn wir zwei Zahlen, als Glieder einer geometrischen Reihe mit einander multipliciren sollen, so können wir nur die Logarithmen dieser Zahlen addiren.

So auch, wenn wir wüßten, daß

der log. von 20	= 1.3010300,
und von 5	= 0.6989700

so ist der log. von $\frac{20}{5} = 4 = 0.6020600$.

Wenn uns also der Logarithmus eines Produkts, so wie der Logarithmus des einen Faktors bekannt ist, so finden wir den Logarithmus des andern Faktors, wenn wir den Logarithmus des Faktors von dem Logarithmus des Produkts subtrahiren.

§. 12.

Was ist der Logarithmus zu 181439?

Nach den gewöhnlichen Tabellen können wir nur den Logarithmus von einer Zahl angeben, die aus 4 Ziffern besteht.

Wenn wir daher 2 Ziffern von der rechten zur linken abschnitten, nemlich 39, so ist dies so viel, als wenn wir die Zahl durch 100 dividirt und in Faktoren zerlegt hätten.

$$1814 \times 100 = 181400.$$

Nach dem was wir schon gehabt haben, dürfen wir nur, um den Logarithmus des Produkts — hier 181400 — zu finden, die Logarithmen der Faktoren addiren.

$$1814 = \log.\ 3.2586373$$
$$100 = \log.\ 2.0000000$$

folglich $1814 \times 100 = 181400 = \log.\ 5.2586373$

Ferner nehmen wir:

$$1815 = \log.\ 3.2588766$$
$$100 = \log.\ 2.0000000$$

folglich $1815 \times 100 = 181500 = \log.\ 5.2588766.$

Weil der erstgefundene Logarithmus zu klein, und dieser zu groß ist, so suchen wir die Differenz derselben, so wie auch die Differenz der Zahlen, zu welchen dies die Logarithmen sind.

$$\log.\ 5.2586373$$
$$\log.\ 5.2588766$$

Differenz der Logarithmen 0.0002393.

$$181400$$
$$181500$$

Differenz der Zahlen 100.

Und schließen:

Wie die Differenz der Zahlen zu dem abgeschnittenen hunderttheiligen Bruch; so verhält sich die logarithmische Differenz zu der logarithmischen Differenz jener abgeschnittenen Zahlen, als:

$$100 : 39 = 0.0002393 : x$$

$$x = \frac{39 \times 0.0002393}{100} = 0.0000933.$$

folglich 0.0000933 ist der Logarithmus der Zahl von 1814 zu klein, daher müssen wir diese gefundene Zahl zu dem Logarithmus von 1814 addiren, nemlich:

$$1814 = \log. 3.2586373$$
$$0.0000933$$

so ist der Log. von 181439 = 3.2587306.

Auf diesem Wege können wir also den Logarithmus zu einer größern Zahl bestimmen, welche in den gewöhnlichen Tafeln nicht zu finden ist.

Oder kürzer:

Es sei z. B. der Logarithmus von 13104 zu suchen.

Die beiden Faktoren sind 234 und 56.

$$234 = \log. 2.3692159$$
$$\text{und } 56 = \log. 1.7481880$$

folglich $234 \times 56 = 13104 = \log. 4.1174039$.

Also man zerlegt die gegebene Zahl in Faktoren, deren Logarithmen zusammen addirt werden; so ist die Summe derselben der Logarithmus der gegebenen Zahl.

§. 13.

Angenommen wir hätten den Log. 5.0406548, und wir sollten die dazu gehörige Zahl finden.

Die Kennziffer muß wenigstens um 2 Einheiten kleiner gemacht werden, wenn wir in den gewöhnlichen Tafeln, die dazu gehörige Zahl finden wollen, also 3.0406548.

Aber nun finden wir keinen Logarithmus, der eben diese Decimalbrüche hat.

Wir nehmen deswegen den nächstkleinern, und den nächstgrößern, nemlich:

log. 3.0406023 = 1098

— 3.0409977 = 1099

und machen die Kennziffer eines jeden so groß, als die Kennziffer des gegebenen Logarithmus ist; daher auch die dazu gehörigen Zahlen 100 mal vergrößert werden müssen.

log. 5.0406023 = 109800

— 5.0409977 = 109900.

Dann subtrahiren wir sowol die Logarithmen, als die dazu gehörigen Zahlen.

log. 5.0406023 = 109800

— 5.0409977 = 109800

Differenz 0.0003954 = 100.

Ziehen darauf den kleinsten der gefundenen Logarithmen von dem gegebenen.

log. 5.0406023.

— 5.0406548.

0.0000525.

Suchen dann noch zu den beiden Unterschieden der Logarithmen, und der Differenz der Zahlen die vierte Proportionalzahl

log. 0.0003954 : log. 0.0000525 = Zahl. 100 : x

$$\text{folglich } x = \frac{0.0000525 \times 100}{0.0003954} = 13.$$

Und addiren endlich diese gefundene Differenz der Zahlen zu der kleinern Zahl, so erhalten wir die Zahl des gegebenen Logarithmus.

109800

13

109813 ist also die Zahl des gegebenen Log. 5.0406548.

§. 14.

Sollten wir nun noch zu einem gegebenen Logarithmus eine gemischte Zahl finden, z. B. zum Log. 2.9884269, so brauchen wir nur den nächstkleinern und den nächstgrößern Logarithmus zu nehmen, und den Unterschied zwischen denselben, und den dazu gehörigen Zahlen zu suchen.

log. 2.9881128 = 973.
— 2.9885589 = 974.

Unterschied 4461 = 1.

Dann subtrahiren wir den kleinsten gefundenen Logarithmus von dem gegebenen

log. 2.9881128
der gegebene log. 2.9884269

3141.

Und schließen nun: Wie sich die Differenz der beiden in den Tabellen gefundenen Logarithmen, zu dem Unterschiede von dem kleinern und dem gegebenen Logarithmus verhält, so muß sich auch die Differenz der beiden Zahlen der gefundenen Logarithmen zum Unterschiede der Zahlen der beiden letztern Logarithmen verhalten.

$$4461 : 3141 = 1 : x$$

$$x = \frac{3141 \times 1}{4461} = 0.70$$

973

973,70. ist also die gemischte Zahl zu dem Logarithmus 2.9884269.

0 Grad.			89 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	0	0	60	10000000	Infinit.
1	6,463726	6,463726	59	9,999999	13,536273
3	6 940847	6 940847	57	9 999999	13 059152
6	7 241877	7 241877	54	9 999999	12 758122
9	7 417968	7 417969	51	9 999998	12 582030
12	7 542906	7 542909	48	9 999997	12 457090
15	7 639816	7 639820	45	9 999995	12 360179
18	7 718996	7 719002	42	9 999994	12 280997
21	7 785942	7 785950	39	9 999991	12 214049
24	7 843933	7 843944	36	9 999989	12 156055
27	7 895085	7 895098	33	9 999986	12 104901
30	7 940841	7 940858	30	9 999983	12 059141
33	7 982233	7 982253	27	9 999980	12 017746
36	8 020020	8 020044	24	9 999976	11 979955
39	8 054781	8 054809	21	9 999972	11 945190
42	8 086964	8 086997	18	9 999967	11 913003
45	8 116926	8 116963	15	9 999962	11 883036
48	8 144953	8 144995	12	9 999957	11 855004
51	8 171280	8 171328	9	9 999952	11 828671
54	8 196102	8 196155	6	9 999946	11 803844
57	8 219581	8 219640	3	9 999940	11 780359

1 Grad.			88 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	8,241855	8,241921	60	9,999933	11,758078
3	8 263042	8 263115	57	9 999927	11 736884
6	8 283243	8 283323	54	9 999920	11 716676
9	8 302546	8 302633	51	9 999912	11 697366
12	8 321026	8 321122	48	9 999904	11 678877
15	8 338752	8 338856	45	9 999896	11 661143
18	8 355783	8 355895	42	9 999888	11 644104
21	8 372171	8 372291	39	9 999879	11 627708
24	8 387962	8 388091	36	9 999870	11 611908
27	8 403199	8 403338	33	9 999860	11 596661
30	8 417919	8 418067	30	9 999851	11 581932
33	8 432156	8 432315	27	9 999841	11 567685
36	8 445940	8 446110	24	9 999830	11 553889
39	8 459301	8 459481	21	9 999819	11 540518
42	8 472262	8 472453	18	9 999808	11 527546
45	8 484847	8 485050	15	9 999797	11 514949
48	8 497078	8 497292	12	9 999785	11 502707
51	8 508973	8 509200	9	9 999773	11 490799
54	8 520551	8 520790	6	9 999761	11 479209
57	8 531828	8 532079	3	9 999748	11 467920

2 Grade.			87 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	8,542819	8,543083	60	9,999735	11,456916
3	8 553538	8 553816	57	9 999722	11 446183
6	8 563999	8 564291	54	9 999708	11 435708
9	8 574213	8 574519	51	9 999694	11 425480
12	8 584193	8 584513	48	9 999679	11 415486
15	8 593948	8 594283	45	9 999665	11 405716
18	8 603488	8 603838	42	9 999650	11 396161
21	8 612823	8 613188	39	9 999634	11 386811
24	8 621961	8 622342	36	9 999618	11 377657
27	8 630911	8 631308	33	9 999602	11 368691
30	8 639679	8 640093	30	9 999586	11 359906
33	8 648274	8 648704	27	9 999569	11 351295
36	8 656701	8 657149	24	9 999552	11 342851
39	8 664968	8 665433	21	9 999535	11 334566
42	8 673080	8 673562	18	9 999517	11 326437
45	8 681043	8 681543	15	9 999499	11 318456
48	8 688862	8 689381	12	9 999481	11 310618
51	8 696543	8 697080	9	9 999462	11 302919
54	8 704089	8 704646	6	9 999443	11 295355
57	8 711507	8 712083	3	9 999424	11 287916

5 Grade.			86 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	8,718800	8,719395	60	9,999404	11,280604
3	8 725972	8 726587	57	9 999384	11 273412
6	8 733027	8 733663	54	9 999364	11 266336
9	8 739969	8 740625	51	9 999343	11 259374
12	8 746801	8 747479	48	9 999322	11 252520
15	8 753527	8 754226	45	9 999300	11 245773
18	8 760151	8 760871	42	9 999279	11 239128
21	8 766674	8 767417	39	9 999257	11 232582
24	8 773101	8 773866	36	9 999234	11 226133
27	8 779434	8 780221	33	9 999212	11 219778
30	8 785675	8 786486	30	9 999189	11 213513
33	8 791827	8 792662	27	9 999165	11 207338
36	8 797894	8 798751	24	9 999142	11 201248
39	8 803876	8 804758	21	9 999118	11 195241
42	8 809777	8 810683	18	9 999093	11 189316
45	8 815598	8 816529	15	9 999069	11 183470
48	8 821342	8 822298	12	9 999044	11 177701
51	8 827011	8 827992	9	9 999018	11 172007
54	8 832606	8 833613	6	9 998993	11 166386
57	8 838130	8 839163	3	9 998967	11 160836

4 Grade.			85 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	8,843584	8,844643	60	9,998940	11,155356
3	8 848970	8 850056	57	9 998914	11 149945
6	8 854290	8 855403	54	9 998887	11 144596
9	8 859545	8 860685	51	9 998859	11 139314
12	8 864737	8 865905	48	9 998832	11 134094
15	8 869868	8 871063	45	9 998804	11 128936
18	8 874938	8 876162	42	9 998775	11 123837
21	8 879949	8 881202	39	9 998747	11 118797
24	8 884903	8 886185	36	9 998718	11 113815
27	8 889800	8 891111	33	9 998688	11 108888
30	8 894643	8 895984	30	9 998659	11 104015
33	8 899432	8 900803	27	9 998629	11 099197
36	8 904168	8 905569	24	9 998598	11 094430
39	8 908853	8 910285	21	9 998568	11 089714
42	8 913488	8 914950	18	9 998537	11 085049
45	8 918073	8 919567	15	9 998505	11 080432
48	8 922610	8 924136	12	9 998474	11 075863
51	8 927100	8 928658	9	9 998442	11 071341
54	8 931543	8 933134	6	9 998409	11 066866
57	8 935942	8 937565	3	9 998377	11 062435

5 Grade.			84 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	8,940296	8,941951	60	9,998344	11,058048
3	8 944606	8 946295	57	9 998310	11 053704
6	8 948873	8 950596	54	9 998277	11 049403
9	8 953099	8 954856	51	9 998243	11 045143
12	8 957284	8 959075	48	9 998208	11 040924
15	8 961428	8 963254	45	9 998174	11 036745
18	8 965533	8 967394	42	9 998139	11 032605
21	8 969599	8 971495	39	9 998104	11 028504
24	8 973628	8 975559	36	9 998068	11 024440
27	8 977618	8 979586	33	9 998032	11 020413
30	8 981572	8 983576	30	9 997996	11 016423
33	8 985491	8 987531	27	9 997959	11 012468
36	8 989373	8 991451	24	9 997922	11 008548
39	8 993221	8 995336	21	9 997885	11 004663
42	8 997035	8 999188	18	9 997847	11 000811
45	9 000816	9 003006	15	9 997809	10 996993
48	9 004563	9 006792	12	9 997771	10 993207
51	9 008278	9 010546	9	9 997732	10 989453
54	9 011961	9 014268	6	9 997693	10 985731
57	9 015613	9 017959	3	9 997654	10 982040

6 Grade.			83 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,019234	9,021620	60	9,997614	10,978379
3	9 022825	9 025251	57	9 997574	10 974749
6	9 026386	9 028852	54	9 997534	10 971147
9	9 029918	9 032424	51	9 997493	10 967575
12	9 033421	9 035968	48	9 997452	10 964031
15	9 036895	9 039484	45	9 997411	10 960515
18	9 040342	9 042973	42	9 997369	10 957026
21	9 043761	9 046434	39	9 997327	10 953565
24	9 047153	9 049868	36	9 997285	10 950131
27	9 050519	9 053277	33	9 997242	10 946722
30	9 053858	9 056659	30	9 997199	10 943340
33	9 057172	9 060016	27	9 997155	10 939983
36	9 060460	9 063348	24	9 997112	10 936651
39	9 063723	9 066655	21	9 997068	10 933344
42	9 066961	9 069938	18	9 997023	10 930061
45	9 070176	9 073196	15	9 996979	10 926803
48	9 073366	9 076432	12	9 996934	10 923567
51	9 076532	9 079644	9	9 996888	10 920355
54	9 079676	9 082833	6	9 996843	10 917166
57	9 082796	9 085999	3	9 996797	10 914000

7 Grade.			82 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,085894	9,089143	60	9,996750	10,910856
3	9 088970	9 092266	57	9 996704	10 907734
6	9 092023	9 095366	54	9 996657	10 904633
9	9 095055	9 098446	51	9 996609	10 901554
12	9 098066	9 101504	48	9 996561	10 898495
15	9 101055	9 104542	45	9 996513	10 895458
18	9 104024	9 107559	42	9 996465	10 892440
21	9 106972	9 110556	39	9 996416	10 889443
24	9 109901	9 113533	36	9 996367	10 886466
27	9 112809	9 116490	33	9 996318	10 883509
30	9 115697	9 119429	30	9 996268	10 880570
33	9 118566	9 122348	27	9 996218	10 877651
36	9 121416	9 125248	24	9 996168	10 874751
39	9 124247	9 128130	21	9 996117	10 871869
42	9 127060	9 130993	18	9 996066	10 869006
45	9 129853	9 133839	15	9 996014	10 866160
48	9 132629	9 136666	12	9 995963	10 863333
51	9 135387	9 139476	9	9 995911	10 860523
54	9 138127	9 142268	6	9 995858	10 857731
57	9 140850	9 145044	3	9 995805	10 854955

8 Grade.			81 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,143555	9,147802	60	9,995752	10,852197
3	9 146243	9 150544	57	9 995699	10 849455
6	9 148914	9 153269	54	9 995645	10 846730
9	9 151569	9 155978	51	9 995591	10 844022
12	9 154207	9 158670	48	9 995537	10 841329
15	9 156829	9 161347	45	9 995482	10 838652
18	9 159435	9 164008	42	9 995427	10 835991
21	9 162025	9 166653	39	9 995371	10 833346
24	9 164599	9 169283	36	9 995315	10 830716
27	9 167158	9 171898	33	9 995259	10 828101
30	9 169702	9 174498	30	9 995203	10 825501
33	9 172230	9 177084	27	9 995146	10 822926
36	9 174743	9 179654	24	9 995089	10 820345
39	9 177242	9 182210	21	9 995031	10 817789
42	9 179726	9 184752	18	9 994974	10 815247
45	9 182196	9 187280	15	9 994915	10 812719
48	9 184651	9 189793	12	9 994857	10 810206
51	9 187092	9 192293	9	9 994798	10 807706
54	9 189519	9 194780	6	9 994739	10 805219
57	9 191932	9 197253	3	9 994679	10 802747

9 Grade.			80 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin	Log. d. Tang.
0	9,194332	9,199712	60	9,994619	10,800287
3	9 196718	9 202158	57	9 994559	10 797841
6	9 199091	9 204592	54	9 994499	10 795407
9	9 201450	9 207012	51	9 994438	10 792987
12	9 203797	9 209420	48	9 994377	10 790579
15	9 206130	9 211815	45	9 994315	10 788184
18	9 208451	9 214198	42	9 994253	10 785802
21	9 210759	9 216568	39	9 994191	10 783431
24	9 213055	9 218926	36	9 994128	10 781073
27	9 215338	9 221272	33	9 994065	10 778727
30	9 217609	9 223606	30	9 994002	10 776393
33	9 219868	9 225928	27	9 993939	10 774071
36	9 222114	9 228239	24	9 993875	10 771760
39	9 224349	9 230538	21	9 993810	10 769461
47	9 226572	9 232826	18	9 993746	10 767173
45	9 228783	9 235102	15	9 993681	10 764897
48	9 230985	9 237367	12	9 993616	10 762632
51	9 233172	9 239621	9	9 993550	10 760378
54	9 235349	9 241865	6	9 993484	10 758135
57	9 237515	9 244097	3	9 993418	10 755902

10 Grade.			79 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,239670	9,246318	60	9,993351	10,753681
3	9 241814	9 248529	57	9 993284	10 751470
6	9 243947	9 250730	54	9 993217	10 749269
9	9 246069	9 252920	51	9 993149	10 747080
12	9 248181	9 255099	48	9 993081	10 744900
15	9 250282	9 257269	45	9 993013	10 742730
18	9 252372	9 259428	42	9 992944	10 740571
21	9 254453	9 261577	39	9 992875	10 738422
24	9 256523	9 263717	36	9 992805	10 736282
27	9 258583	9 265847	33	9 992736	10 734153
30	9 260633	9 267966	30	9 992666	10 732033
33	9 262672	9 270077	27	9 992595	10 729922
36	9 264703	9 272178	24	9 992525	10 727822
39	9 266723	9 274269	21	9 992453	10 725730
42	9 268733	9 276351	18	9 992382	10 723648
45	9 270734	9 278424	15	9 992310	10 721575
48	9 272726	9 280487	12	9 992238	10 719512
51	9 274708	9 282542	9	9 992166	10 717457
54	9 276681	9 284587	6	9 992093	10 715412
57	9 278644	9 286624	3	9 992020	10 713375

11 Grade.			78 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,280598	9,288652	60	9,991946	10,711347
3	9 282544	9 290671	57	9 991872	10 709328
6	9 284480	9 292681	54	9 991798	10 707318
9	9 286407	9 294683	51	9 991724	10 705316
12	9 288326	9 296676	48	9 991649	10 703323
15	9 290235	9 298661	45	9 991573	10 701338
18	9 292136	9 300638	42	9 991498	10 699361
21	9 294029	9 302606	39	9 991422	10 697393
24	9 295912	9 304566	36	9 991346	10 695435
27	9 297788	9 306518	33	9 991269	10 693481
30	9 299655	9 308462	30	9 991192	10 691537
33	9 301514	9 310398	27	9 991115	10 689601
36	9 303364	9 312326	24	9 991037	10 687673
39	9 305206	9 314246	21	9 990959	10 685753
42	9 307040	9 316159	18	9 990881	10 683840
45	9 308866	9 318064	15	9 990802	10 681936
48	9 310684	9 319961	12	9 990723	10 680038
51	9 312495	9 321850	9	9 990644	10 678149
54	9 314297	9 323732	6	9 990564	10 676267
57	9 316092	9 325607	3	9 990484	10 674392

12 Grade.			77 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,317878	9,327474	60	9,990404	10,672525
3	9 319658	9 329334	57	9 990323	10 670665
6	9 321429	9 331187	54	9 990242	10 668812
9	9 323193	9 333032	51	9 990161	10 666967
12	9 324950	9 334871	48	9 990079	10 665128
15	9 326699	9 336702	45	9 989997	10 663297
18	9 328441	9 338526	42	9 989914	10 661473
21	9 330176	9 340344	39	9 989832	10 659655
24	9 331903	9 342154	36	9 989748	10 657845
27	9 333623	9 343958	33	9 989665	10 656041
30	9 335336	9 345755	30	9 989581	10 654244
33	9 337042	9 347545	27	9 989497	10 652454
36	9 338741	9 349329	24	9 989412	10 650671
39	9 340433	9 351105	21	9 989327	10 648894
42	9 342119	9 352876	18	9 989242	10 647125
45	9 343797	9 354640	15	9 989157	10 645359
48	9 345468	9 356397	12	9 989071	10 643602
51	9 347133	9 358148	9	9 988984	10 641851
54	9 348791	9 359893	6	9 988898	10 640106
57	9 350443	9 361631	3	9 988811	10 638368

13 Grade.			76 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,352088	9 363364	60	9,988723	10,636635
3	9 353726	9 365090	57	9 988636	10 634909
6	9 355358	9 366810	54	9 988548	10 633190
9	9 356983	9 368523	51	9 988459	10 631476
12	9 358602	9 370231	48	9 988371	10 629768
15	9 360215	9 371933	45	9 988282	10 628066
18	9 361821	9 373629	42	9 988192	10 626370
21	9 363421	9 375319	39	9 988102	10 624681
24	9 365015	9 377003	36	9 988012	10 622997
27	9 366603	9 378681	33	9 987922	10 621318
30	9 368185	9 380353	30	9 987831	10 629646
33	9 369760	9 382020	27	9 987740	10 617979
36	9 371330	9 383681	24	9 987648	10 616318
39	9 372894	9 385337	21	9 987557	10 614663
42	9 374451	9 386986	18	9 987464	10 613011
45	9 376003	9 388631	15	9 987372	10 611368
48	9 377549	9 390270	12	9 987279	10 609730
51	9 379089	9 391903	9	9 987186	10 608096
54	9 380623	9 393531	6	9 987092	10 606468
57	9 382152	9 395153	3	9 986998	10 604846

14 Grade.			75 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,383675	9,396771	60	9,986904	10,603228
3	9 385192	9 398383	57	9 986809	10 601617
6	9 386704	9 399989	54	9 986714	10 600010
9	9 388210	9 401591	51	9 986619	10 598409
12	9 389710	9 403187	48	9 986523	10 596812
15	9 391205	9 404778	45	9 986427	10 595221
18	9 392695	9 406364	42	9 986330	10 593635
21	9 394179	9 407945	39	9 986234	10 592054
24	9 395658	9 409521	36	9 986136	10 590478
27	9 397131	9 411092	33	9 986039	10 588907
30	9 398599	9 412658	30	9 985941	10 587341
33	9 400062	9 414219	27	9 985843	10 585780
36	9 401520	9 415775	24	9 985744	10 584224
39	9 402972	9 417326	21	9 985646	10 582673
42	9 404419	9 418872	18	9 985546	10 581127
45	9 405861	9 420414	15	9 985447	10 579585
48	9 407298	9 421951	12	9 985347	10 578048
51	9 408730	9 423483	9	9 985246	10 576516
54	9 410157	9 425011	6	9 985146	10 574988
57	9 411579	9 426534	3	9 985045	10 573465

15 Grade.			74 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,412996	9,428052	60	9,984945	10,571947
3	9 414408	9 429566	57	9 984842	10 570433
6	9 415815	9 431075	54	9 984740	10 568924
9	9 417217	9 432579	51	9 984637	10 567420
12	9 418614	9 434080	48	9 984534	10 565920
15	9 420007	9 435575	45	9 984431	10 564424
18	9 421395	9 437067	42	9 984328	10 562933
21	9 422778	9 438553	39	9 984224	10 561446
24	9 424156	9 440036	36	9 984120	10 559965
27	9 425529	9 441514	33	9 984015	10 558485
30	9 426898	9 442988	30	9 983910	10 557011
33	9 428263	9 444457	27	9 983805	10 555542
36	9 429622	9 445923	24	9 983699	10 554076
39	9 430977	9 447384	21	9 983593	10 552615
42	9 432328	9 448841	18	9 983487	10 551158
45	9 433674	9 450294	15	9 983380	10 549706
48	9 435016	9 451742	12	9 983273	10 548257
51	9 436353	9 453187	9	9 983166	10 546812
54	9 437685	9 454627	6	9 983058	10 545372
57	9 439014	9 456064	3	9 982950	10 543935

16 Grade.			73 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,440338	9,457496	60	9,982841	10,542505
3	9 441657	9 458924	57	9 982732	10 541075
6	9 442972	9 460349	54	9 982623	10 539650
9	9 444283	9 461769	51	9 982514	10 538230
12	9 445590	9 463186	48	9 982404	10 536813
15	9 446892	9 464599	45	9 982293	10 535401
18	9 448190	9 466007	42	9 982183	10 533992
21	9 449484	9 467412	39	9 982072	10 532587
24	9 450774	9 468813	36	9 981960	10 531186
27	9 452060	9 470211	33	9 981849	10 529788
30	9 453341	9 471604	30	9 981737	10 528395
33	9 454619	9 472994	27	9 981624	10 527005
36	9 455892	9 474380	24	9 981511	10 525619
39	9 457161	9 475763	21	9 981398	10 524236
42	9 458427	9 477142	18	9 981285	10 522857
45	9 459688	9 478517	15	9 981171	10 521482
48	9 460945	9 479888	12	9 981056	10 520111
51	9 462198	9 481256	9	9 980942	10 518743
54	9 463448	9 482621	6	9 980827	10 517379
57	9 464693	9 483981	3	9 980712	10 516018

17 Grade.			72 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,465935	9,485339	60	9,980596	10,514661
3	9 467173	9 486692	57	9 980480	10 513307
6	9 468406	9 488043	54	9 980363	10 511957
9	9 469636	9 489389	51	9 980247	10 510610
12	9 470863	9 490733	48	9 980129	10 509266
15	9 472085	9 492073	45	9 980012	10 507926
18	9 473304	9 493409	42	9 979894	10 506590
21	9 474519	9 494742	39	9 979776	10 505257
24	9 475730	9 496072	36	9 979657	10 503927
27	9 476938	9 497399	33	9 979538	10 502600
30	9 478141	9 498722	30	9 979419	10 501277
33	9 479342	9 500042	27	9 979299	10 499957
36	9 480538	9 501358	24	9 979179	10 498641
39	9 481731	9 502672	21	9 979059	10 497327
42	9 482920	9 503982	18	9 978938	10 496017
45	9 484106	9 505289	15	9 978817	10 494710
48	9 485288	9 506592	12	9 978696	10 493407
51	9 486467	9 507893	9	9 978574	10 492106
54	9 487642	9 509190	6	9 978451	10 490809
57	9 488814	9 510484	3	9 978329	10 489515

18 Grade.			71 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,489982	9,511776	60	9,978206	10,488224
3	9 491147	9 513064	57	9 978083	10 486935
6	9 492308	9 514349	54	9 977959	10 485651
9	9 493466	9 515630	51	9 977835	10 484369
12	9 494620	9 516909	48	9 977710	10 483090
15	9 495771	9 518185	45	9 977586	10 481814
18	9 496919	9 519458	42	9 977460	10 480541
21	9 498063	9 520728	39	9 977335	10 479271
24	9 499204	9 521995	36	9 977209	10 478005
27	9 500342	9 523258	33	9 977083	10 476741
30	9 501476	9 524519	30	9 976956	10 475480
33	9 502607	9 525777	27	9 976829	10 474222
36	9 503735	9 527003	24	9 976702	10 472966
39	9 504859	9 528285	21	9 979574	10 471714
42	9 505981	9 529534	18	9 976446	10 470465
45	9 507099	9 530781	15	9 976317	10 469218
48	9 508214	9 532025	12	9 976189	10 467975
51	9 509325	9 533265	9	9 976059	10 466734
54	9 510434	9 534504	6	9 975930	10 465496
57	9 511539	9 535739	3	9 975800	10 464260

19 Grade.			70 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,512641	9,536971	60	9,975670	10,463028
3	9 513741	9 538201	57	9 975539	10 461798
6	9 514837	9 539428	54	9 975408	10 460571
9	9 515930	9 540653	51	9 975276	10 459346
12	9 517019	9 541874	48	9 975145	10 458125
15	9 518106	9 543093	45	9 975012	10 456906
18	9 519190	9 544310	42	9 974880	10 455690
21	9 520271	9 545523	39	9 974747	10 454476
24	9 521348	9 546734	36	9 974614	10 453265
27	9 522423	9 547943	33	9 974480	10 452057
30	9 523495	9 549148	30	9 974346	10 450851
33	9 524564	9 550351	27	9 974212	10 449648
36	9 525629	9 551552	24	9 974077	10 448447
39	9 526692	9 552750	21	9 973942	10 447249
42	9 527752	9 553945	18	9 973806	10 446054
45	9 528809	9 555138	15	9 973670	10 444861
48	9 529863	9 556329	12	9 973534	10 443670
51	9 530915	9 557517	9	9 973398	10 442482
54	9 531963	9 558702	6	9 973261	10 441297
57	9 533009	9 559885	3	9 973123	10 440114

20 Grade.			69 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,534051	9,561065	60	9,972985	10,438934
3	9,535091	9,562243	57	9,972847	10,437756
6	9,536128	9,563419	54	9,972709	10,436580
9	9,537162	9,564592	51	9,972570	10,435407
12	9,538194	9,565763	48	9,972431	10,434236
15	9,539223	9,566931	45	9,972291	10,433068
18	9,540248	9,568097	42	9,972151	10,431902
21	9,541272	9,569261	39	9,972011	10,430738
24	9,542292	9,570422	36	9,971870	10,429577
27	9,543310	9,571581	33	9,971729	10,428418
30	9,544325	9,572737	30	9,971587	10,427262
33	9,545337	9,573891	27	9,971445	10,426108
36	9,546347	9,575043	24	9,971303	10,424956
39	9,547354	9,576193	21	9,971160	10,423806
42	9,548358	9,577340	18	9,971017	10,422659
45	9,549360	9,578485	15	9,970874	10,421514
48	9,550359	9,579628	12	9,970730	10,420371
51	9,551355	9,580769	9	9,970586	10,419230
54	9,552349	9,581907	6	9,970441	10,418092
57	9,553340	9,583043	3	9,970297	10,416956

21 Grade.			68 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,554329	9,584177	60	9,970151	10,415822
3	9 555315	9 585309	57	9 970006	10 414690
6	9 556298	9 586438	54	9 969860	10 413561
9	9 557279	9 587566	51	9 969713	10 412434
12	9 558257	9 588691	48	9 969566	10 411308
15	9 559233	9 589814	45	9 969419	10 410185
18	9 560207	9 590935	42	9 969272	10 409064
21	9 561177	9 592053	39	9 969124	10 407946
24	9 562146	9 593170	36	9 968975	10 406829
27	9 563112	9 594285	33	9 968827	10 405714
30	9 564075	9 595397	30	9 968677	10 404602
33	9 565036	9 596507	27	9 968528	10 403492
36	9 565994	9 597616	24	9 968378	10 402385
39	9 566950	9 598722	21	9 968228	10 401277
42	9 567904	9 599826	18	9 968077	10 400173
45	9 568855	9 600928	15	9 967926	10 399071
48	9 569804	9 602029	12	9 967775	10 397971
51	9 570750	9 603127	9	9 967623	10 396872
54	9 571694	9 604225	6	9 967471	10 395776
57	9 572636	9 605317	3	9 967318	10 394682

22 Grade.			67 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,573575	9,606409	60	9,967165	10,393590
3	9 574512	9 607499	57	9 967012	10 392500
6	9 575446	9 608588	54	9 966858	10 391412
9	9 576379	9 609674	51	9 966704	10 390325
12	9 577308	9 610758	48	9 966550	10 389241
15	9 578236	9 611840	45	9 966395	10 388159
18	9 579161	9 612921	42	9 966240	10 387078
21	9 580084	9 614000	39	9 966084	10 386000
24	9 581005	9 615076	36	9 965928	10 384923
27	9 581923	9 616151	33	9 965772	10 383848
30	9 582839	9 617224	30	9 965615	10 382775
33	9 583753	9 618295	27	9 965458	10 381704
36	9 584665	9 619364	24	9 965300	10 380635
39	9 585574	9 620431	21	9 965142	10 379568
42	9 586481	9 621497	18	9 964984	10 378502
45	9 587386	9 622560	15	9 964825	10 377439
48	9 588289	9 623622	12	9 964666	10 376377
51	9 589189	9 624682	9	9 964506	10 375317
54	9 590088	9 625740	6	9 964347	10 374259
57	9 590984	9 626797	3	9 964186	10 373202

23 Grade.			66 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,591878	9,627851	60	9,964026	10,372148
3	9 592769	9 628904	57	9 963865	10 371095
6	9 593659	9 629955	54	9 963703	10 370044
9	9 594546	9 631005	51	9 963541	10 368994
12	9 595432	9 632052	48	9 963379	10 367947
15	9 596315	9 633098	45	9 963216	10 366901
18	9 597196	9 634142	42	9 963053	10 365857
21	9 598075	9 635185	39	9 962890	10 364815
24	9 598952	9 636225	36	9 962726	10 363774
27	9 599827	9 637264	33	9 962562	10 362735
30	9 600699	9 638301	30	9 962397	10 361698
33	9 601570	9 639337	27	9 962232	10 360662
36	9 602438	9 640371	24	9 962067	10 359628
39	9 603305	9 641403	21	9 961901	10 358596
42	9 604169	9 642434	18	9 961735	10 357565
45	9 605032	9 643463	15	9 961568	10 356536
48	9 605892	9 644490	12	9 961402	10 355509
51	9 606750	9 645516	9	9 961234	10 354484
54	9 607606	9 646540	6	9 961066	10 353460
57	9 608461	9 647562	3	9 960898	10 352437

24 Grade.			65 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,609313	9,648583	60	9,960730	10,351416
3	9 610163	9 649602	57	9 960561	10 350397
6	9 611011	9 650619	54	9 960391	10 349380
9	9 611858	9 651635	51	9 960222	10 348364
12	9 612702	9 652650	48	9 960052	10 347349
15	9 613544	9 653663	45	9 959881	10 346336
18	9 614385	9 654674	42	9 959710	10 345325
21	9 615223	9 655684	39	9 959539	10 344315
24	9 616059	9 656692	36	9 959367	10 343307
27	9 616894	9 657698	33	9 959195	10 342301
30	9 617727	9 658704	30	9 959022	10 341295
33	9 618557	9 659707	27	9 958850	10 340292
36	9 619386	9 660709	24	9 958676	10 339290
39	9 620213	9 661710	21	9 958503	10 338289
42	9 621038	9 662709	18	9 958328	10 337290
45	9 621861	9 663706	15	9 958154	10 336293
48	9 622682	9 664703	12	9 957979	10 335297
51	9 623501	9 665697	9	9 957804	10 334302
54	9 624319	9 666690	6	9 957628	10 333309
57	9 625134	9 667682	3	9 957452	10 332317

25 Grade.			64 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,625948	9,668672	60	9,957275	10,331327
3	9 626760	9 669661	57	9 957098	10 330338
6	9 627570	9 670648	54	9 956921	10 329351
9	9 628378	9 671634	51	9 956743	10 328365
12	9 629184	9 672619	48	9 956565	10 327381
15	9 629989	9 673602	45	9 956387	10 326398
18	9 630791	9 674583	42	9 956208	10 325416
21	9 631592	9 675563	39	9 956028	10 324436
24	9 632391	9 676542	36	9 955849	10 323457
27	9 633188	9 677520	33	9 955668	10 322479
30	9 633984	9 678496	30	9 955488	10 321503
33	9 634778	9 679470	27	9 955307	10 320529
36	9 635569	9 680444	24	9 955125	10 319556
39	9 636360	9 681416	21	9 954944	10 318584
42	9 637148	9 682386	18	9 954761	10 317615
45	9 637935	9 683355	15	9 954579	10 316644
48	9 638719	9 684323	12	9 954396	10 314676
51	9 639503	9 685290	9	9 954212	10 314709
54	9 640284	9 686255	6	9 954029	10 313744
57	9 641064	9 687219	3	9 953844	10 312780

26 Grade.			63 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,641842	9,688181	60	9,953660	10,311818
3	9 642618	9 689143	57	9 953475	10 310857
6	9 643392	9 690103	54	9 953289	10 309897
9	9 644165	9 691061	51	9 953103	10 308938
12	9 644936	9 692018	48	9 952917	10 307981
15	9 645705	9 692975	45	9 952730	10 307025
18	9 646473	9 693929	42	9 952543	10 306070
21	9 647239	9 694883	39	9 952356	10 305116
24	9 648003	9 695835	36	9 952168	10 304164
27	9 648766	9 696786	33	9 951979	10 303213
30	9 649527	9 697736	30	9 951791	10 302263
33	9 650286	9 698684	27	9 951602	10 301315
36	9 651044	9 699632	24	9 951412	10 300368
39	9 651800	9 700578	21	9 951222	10 299422
42	9 652554	9 701522	18	9 951032	10 298477
45	9 653307	9 702466	15	9 950841	10 297533
48	9 654058	9 703408	12	9 950650	10 296591
51	9 654808	9 704349	9	9 950458	10 295650
54	9 655555	9 705289	6	9 950266	10 294710
57	9 656302	9 706228	3	9 950075	10 293771

27 Grade.			62 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,657046	9,707165	60	9,949880	10,292834
3	9 657789	9 708102	57	9 949687	10 291897
6	9 658531	9 709037	54	9 949493	10 290962
9	9 659271	9 709971	51	9 949299	10 290028
12	9 660009	9 710904	48	9 949105	10 289095
15	9 660745	9 711835	45	9 948910	10 288164
18	9 661481	9 712766	42	9 948714	10 287233
21	9 662214	9 713695	39	9 948518	10 286304
24	9 662946	9 714623	36	9 948322	10 285376
27	9 663676	9 715550	33	9 948126	10 284449
30	9 664405	9 716476	30	9 947928	10 283523
33	9 665132	9 717401	27	9 947731	10 282598
36	9 665858	9 718325	24	9 947533	10 281674
39	9 666582	9 719247	21	9 947335	10 280752
42	9 667305	9 720169	18	9 947136	10 279831
45	9 668026	9 721089	15	9 946937	10 278910
48	9 668746	9 722008	12	9 946737	10 277991
51	9 669464	9 722926	9	9 946537	10 277073
54	9 670180	9 723843	6	9 946337	10 276156
57	9 670895	9 724759	3	9 946136	10 275240

28 Grade.			61 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,671609	9,725674	60	9,945934	10,274325
3	9 672321	9 726588	57	9 945733	10 273411
6	9 673031	9 727500	54	9 945531	10 272499
9	9 673740	9 728412	51	9 945328	10 271587
12	9 674448	9 729323	48	9 945125	10 270677
15	9 675154	9 730232	45	9 944922	10 269767
18	9 675859	9 731141	42	9 944718	10 268859
21	9 676562	9 732048	39	9 944513	10 267951
24	9 677264	9 732954	36	9 944309	10 267045
27	9 677964	9 733860	33	9 944104	10 266139
30	9 678662	9 734764	30	9 943898	10 265235
33	9 679360	9 735667	27	9 943692	10 264332
36	9 680056	9 736569	24	9 943486	10 263430
39	9 680750	9 737471	21	9 943279	10 262528
42	9 681443	9 738371	18	9 943072	10 261628
45	9 682134	9 739270	15	9 942864	10 260729
48	9 682825	9 740168	12	9 942656	10 259831
51	9 683513	9 741066	9	9 942447	10 258933
54	9 684201	9 741962	6	9 942238	10 258037
57	9 684886	9 742857	3	9 942029	10 257142

29 Grade.			60 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9.685571	9,743752	60	9,941819	10,256248
3	9 686254	9 744645	57	9 941609	10 255354
6	9 686935	9 745537	54	9 941398	10 254462
9	9 687616	9 746429	51	9 941187	10 253571
12	9 688294	9 747319	48	9 940975	10 252680
15	9 688972	9 748208	45	9 940763	10 251791
18	9 689648	9 749097	42	9 940551	10 250902
21	9 690323	9 749985	39	9 940338	10 250015
24	9 690996	9 750871	36	9 940124	10 249128
27	9 691668	9 751757	33	9 939911	10 248242
30	9 692338	9 752642	30	9 939696	10 247358
33	9 693008	9 753525	27	9 939482	10 246474
36	9 693675	9 754408	24	9 939267	10 245591
39	9 694342	9 755290	21	9 939051	10 244709
42	9 695007	9 756171	18	9 938835	10 243828
45	9 695671	9 757052	15	9 938619	10 242948
48	9 696333	9 757931	12	9 938402	10 242068
51	9 696994	9 758809	9	9 938185	10 241190
54	9 697654	9 759687	6	9 937967	10 240312
57	9 698312	9 760563	3	9 937749	10 239436

30 Grade.			59 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d Tang	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,698970	9,761439	60	9,937530	10,238560
3	9 699625	9 762314	57	9 937311	10 237685
6	9 700280	9 763188	54	9 937092	10 236811
9	9 700933	9 764061	51	9 936872	10 235938
12	9 701585	9 764933	48	9 936651	10 235066
15	9 702235	9 765804	45	9 936431	10 234195
18	9 702884	9 766675	42	9 936209	10 233324
21	9 703532	9 767544	39	9 935988	10 232455
24	9 704179	9 768413	36	9 935766	10 231586
27	9 704824	9 769281	33	9 935543	10 230718
30	9 705468	9 770148	30	9 935320	10 229851
33	9 706111	9 771014	27	9 935096	10 228985
36	9 706753	9 771880	24	9 934873	10 228119
39	9 707393	9 772744	21	9 934648	10 227255
42	9 708032	9 773608	18	9 934423	10 226391
45	9 708669	9 774471	15	9 934198	10 225528
48	9 709306	9 775333	12	9 933972	10 224666
51	9 709941	9 776194	9	9 933746	10 223805
54	9 710575	9 777055	6	9 933520	10 222944
57	9 711208	9 777914	3	9 933293	10 222085

31 Grade.			58 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,711839	9 778773	60	9,933065	10,221226
3	9 712469	9 779631	57	9 932837	10 220368
6	9 713098	9 780489	54	9 932609	10 219510
9	9 713726	9 781345	51	9 932380	10 218654
12	9 714352	9 782201	48	9 932151	10 217798
15	9 714977	9 783056	45	9 931921	10 216943
18	9 715601	9 783910	42	9 931691	10 216089
21	9 716224	9 784763	39	9 931460	10 215236
24	9 716845	9 785616	36	9 931229	10 214383
27	9 717466	9 786468	33	9 930997	10 213531
30	9 718085	9 787319	30	9 930765	10 212680
33	9 718703	9 788169	27	9 930533	10 211830
36	9 719319	9 789019	24	9 930300	10 210980
39	9 719935	9 789868	21	9 930067	10 210131
42	9 720549	9 790716	18	9 929833	10 209283
45	9 721162	9 791563	15	9 929598	10 208436
48	9 721774	9 792410	12	9 929364	10 207589
51	9 722384	9 793256	9	9 929128	10 206744
54	9 722994	9 794101	6	9 928893	10 205898
57	9 723602	9 794945	3	9 928657	10 205054

32 Grade.			57 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,724209	9,795789	60	9,928420	10,204210
3	9 724815	9 796632	57	9 928183	10 203367
6	9 725420	9 797474	54	9 927945	10 202525
9	9 726024	9 798316	51	9 927707	10 201684
12	9 726626	9 799156	48	9 927469	10 200843
15	9 727227	9 799997	45	9 927230	10 200003
18	9 727827	9 800836	42	9 926991	10 199163
21	9 728426	9 801675	39	9 926751	10 198324
24	9 729024	9 802513	36	9 926511	10 197486
27	9 729621	9 803350	33	9 926270	10 196649
30	9 730216	9 804187	30	9 926029	10 195812
33	9 730810	9 805023	27	9 925787	10 194976
36	9 731404	9 805858	24	9 925545	10 194141
39	9 731996	9 806693	21	9 925302	10 193306
42	9 732587	9 807527	18	9 925059	10 192472
45	9 733176	9 808360	15	9 924816	10 191639
48	9 733765	9 809193	12	9 924572	10 190806
51	9 734352	9 810025	9	9 924327	10 189974
54	9 734939	9 810856	6	9 924082	10 189143
57	9 735524	9 811687	3	9 923837	10 188312

33 Grade.			56 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,736108	9,812517	60	9,923591	10,187482
3	9 736691	9 813346	57	9 923345	10 186653
6	9 737273	9 814175	54	9 923098	10 185824
9	9 737854	9 815003	51	9 922850	10 184996
12	9 738434	9 815831	48	9 922603	10 184168
15	9 739012	9 816658	45	9 922354	10 183342
18	9 739590	9 817484	42	9 922106	10 182515
21	9 740166	9 818309	39	9 921857	10 181690
24	9 740742	9 819134	36	9 921607	10 180865
27	9 741316	9 819959	33	9 921357	10 180040
30	9 741889	9 820782	30	9 921106	10 179217
33	9 742461	9 821606	27	9 920855	10 178394
36	9 743032	9 822428	24	9 920603	10 177571
39	9 743602	9 823250	21	9 920351	10 176749
42	9 744171	9 824071	18	9 920099	10 175928
45	9 744739	9 824892	15	9 919846	10 175107
48	9 745305	9 825712	12	9 919592	10 174287
51.	9 745871	9 826532	9	9 919339	10 173467
54	9 746435	9 827351	6	9 919084	10 172648
57	9 746999	9 828169	3	9 918829	10 171830

54 Grade.			55 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,747561	9,828987	60	9,918574	10,171012
3	9 748123	9 829804	57	9 918318	10 170195
6	9 748683	9 830621	54	9 918062	10 169378
9	9 749242	9 831437	51	9 917805	10 168562
12	9 749800	9 832252	48	9 917547	10 167747
15	9 750357	9 833067	45	9 917290	10 166932
18	9 750914	9 833882	42	9 917031	10 166117
21	9 751469	9 834696	39	9 916773	10 165303
24	9 752023	9 835509	36	9 916513	10 164490
27	9 752576	9 836322	33	9 916253	10 163677
30	9 753128	9 837134	30	9 915993	10 162865
33	9 753679	9 837946	27	9 915733	10 162054
36	9 754228	9 838757	24	9 915471	10 161242
39	9 754777	9 839567	21	9 915210	10 160432
42	9 755325	9 840377	18	9 914947	10 159622
45	9 755872	9 841187	15	9 914685	10 158812
48	9 756418	9 841996	12	9 914422	10 158003
51	9 756963	9 842804	9	9 914158	10 157195
54	9 757506	9 843612	6	9 913894	10 156387
57	9 758049	9 844419	3	9 913629	10 155580

35 Grade.			54 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,758591	9,845226	60	9,913364	10,154773
3	9 759132	9 846033	57	9 913098	10 153966
6	9 759671	9 846839	54	9 912832	10 153161
9	9 760210	9 847644	51	9 912566	10 152355
12	9 760748	9 848449	48	9 912299	10 151550
15	9 761285	9 849253	45	9 912031	10 150746
18	9 761820	9 850057	42	9 911763	10 149942
21	9 762355	9 850860	39	9 911494	10 149139
24	9 762889	9 851663	36	9 911225	10 148336
27	9 763422	9 852466	33	9 910956	10 147533
30	9 763954	9 853268	30	9 910686	10 146732
33	9 764484	9 854069	27	9 910415	10 145930
36	9 765014	9 854870	24	9 910144	10 145129
39	9 765543	9 855670	21	9 909872	10 144329
42	9 766071	9 856470	18	9 909600	10 143529
45	9 766589	9 857270	15	9 909328	10 142729
48	9 767124	9 858069	12	9 909055	10 141930
51	9 767649	9 858868	9	9 908781	10 141132
54	9 768173	9 859666	6	9 908507	10 140333
57	9 768696	9 860463	3	9 908232	10 139536

36 Grade.			53 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,769218	9,861261	60	9,907957	10,138739
3	9 769739	9 862057	57	9 907682	10 137942
6	9 770260	9 862854	54	9 907405	10 137145
9	9 770779	9 863650	51	9 907129	10 136350
12	9 771297	9 864445	48	9 906852	10 135554
15	9 771815	9 865240	45	9 906574	10 134759
18	9 772331	9 866035	42	9 906296	10 133965
21	9 772846	9 866829	39	9 906017	10 133170
24	9 773361	9 867622	36	9 905738	10 132377
27	9 773874	9 868416	33	9 905458	10 131584
30	9 774387	9 869208	30	9 905178	10 130791
33	9 774899	9 870001	27	9 904898	10 129998
36	9 775410	9 870793	24	9 904616	10 129206
39	9 775919	9 871584	21	9 904335	10 128415
42	9 776428	9 872376	18	9 904052	10 127624
45	9 776936	9 873166	15	9 903770	10 126833
48	9 777443	9 873957	12	9 903486	10 126042
51	9 777950	9 874747	9	9 903203	10 125253
54	9 778455	9 875536	6	9 902918	10 124463
57	9 778959	9 876325	3	9 902633	10 123674

37 Grade.			52 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,779463	9,877114	60	9,902348	10,122885
3	9 779965	9 877902	57	9 902062	10 122097
6	9 780467	9 878690	54	9 901776	10 121309
9	9 780967	9 879478	51	9 901489	10 120521
12	9 781467	9 880265	48	9 901202	10 119734
15	9 781966	9 881052	45	9 900914	10 118947
18	9 782464	9 881838	42	9 900625	10 118161
21	9 782961	9 882624	39	9 900336	10 117375
24	9 783457	9 883410	36	9 900047	10 116589
27	9 783952	9 884195	33	9 899757	10 115804
30	9 784447	9 884980	30	9 899466	10 115019
33	9 784940	9 885765	27	9 899175	10 114235
36	9 785433	9 886549	24	9 898884	10 113450
39	9 785924	9 887333	21	9 898591	10 112667
42	9 786415	9 888116	18	9 898299	10 111883
45	9 786905	9 888899	15	9 898006	10 111100
48	9 787394	9 889682	12	9 897712	10 110317
51	9 787882	9 890464	9	9 897418	10 109535
54	9 788370	9 891246	6	9 897123	10 108753
57	9 788856	9 892028	3	9 896828	10 107971

38 Grade.			51 Grade.		
Min	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,789342	9,892809	60	9,896532	10,107190
3	9 789826	9 893590	57	9 896235	10 106409
6	9 790310	9 894371	54	9 895938	10 105628
9	9 790793	9 895151	51	9 895641	10 104848
12	9 791275	9 895931	48	9 895343	10 104068
15	9 791756	9 896711	45	9 895045	10 103288
18	9 792236	9 897491	42	9 894745	10 102509
21	9 792716	9 898270	39	9 894446	10 101730
24	9 793194	9 899048	36	9 894146	10 100951
27	9 793672	9 899827	33	9 893845	10 100172
30	9 794149	9 900605	30	9 893544	10 099394
33	9 794025	9 961383	27	9 893242	10 098617
36	9 795100	9 902160	24	9 892940	10 097839
39	9 795575	9 902937	21	9 892637	10 097062
42	9 796048	9 903714	18	9 892334	10 096285
45	9 796521	9 904491	15	9 892030	10 095509
48	9 796993	9 905267	12	9 891725	10 094732
51	9 797464	9 906043	9	9 891420	10 093956
54	9 797934	9 906818	6	9 891115	10 092181
57	9 798403	9 907594	3	9 890809	10 093405

39 Grade.			50 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,798871	9,908369	60	9,890502	10,091630
3	9 799339	9 909144	57	9 890195	10 090856
6	9 799806	9 909918	54	9 889887	10 090081
9	9 800272	9 910692	51	9 889579	10 089307
12	9 800737	9 911466	48	9 889270	10 088533
15	9 801201	9 912240	45	9 888961	10 087759
18	9 801664	9 913013	42	9 888651	10 086986
21	9 802128	9 913786	39	9 888340	10 086213
24	9 802589	9 914559	36	9 888029	10 085440
27	9 803050	9 915332	33	9 887718	10 084667
30	9 803510	9 916104	30	9 887406	10 083895
33	9 803969	9 916876	27	9 887093	10 083123
36	9 804428	9 917648	24	9 886780	10 082351
39	9 804886	9 918419	21	9 886466	10 081580
42	9 805343	9 919191	18	9 886151	10 080808
45	9 805799	9 919962	15	9 885837	10 080037
48	9 806254	9 920732	12	9 885521	10 079267
51	9 806708	9 921503	9	9 885205	10 078496
54	9 807162	9 922273	6	9 884888	10 077726
57	9 807615	9 923043	3	9 884571	10 076956

40 Grade.			49 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,808067	9,923813	60	9,884254	10,076186
3	9 808518	9 924583	57	9 883935	10 075416
6	9 808969	9 925352	54	9 883616	10 074647
9	9 809418	9 926121	51	9 883297	10 073878
12	9 809867	9 926890	48	9 882977	10 073109
15	9 810315	9 927659	45	9 882656	10 072341
18	9 810763	9 928427	42	9 882335	10 071572
21	9 811209	9 929195	39	9 882014	10 070804
24	9 811655	9 929963	36	9 881691	10 070036
27	9 812100	9 930731	33	9 881368	10 069268
30	9 812544	9 931498	30	9 881045	10 068501
33	9 812987	9 932266	27	9 880721	10 067735
36	9 813430	9 933033	24	9 880397	10 066966
39	9 813872	9 933800	21	9 880071	10 066199
42	9 814313	9 934567	18	9 879746	10 065433
45	9 814753	9 935333	15	9 879419	10 064666
48	9 815192	9 936099	12	9 879093	10 063900
51	9 815631	9 936865	9	9 878765	10 063134
54	9 816069	9 937631	6	9 878437	10 062368
57	9 816506	9 938397	3	9 878109	10 061602

41 Grade.			48 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,816942	9,939163	60	9,877779	10,060836
3	9 817378	9 939928	57	9 877450	10 060071
6	9 817813	9 940693	54	9 877119	10 059306
9	9 81[illegible]247	9 941458	51	9 876788	10 058541
12	9 818608	9 942223	48	9 876457	10 057776
15	9 8[illegible]9113	9 942987	45	9 876125	10 057012
18	9 8[illegible]9545	9 943752	42	9 875792	10 056247
21	9 8[illegible]9976	9 944516	39	9 875459	10 055483
24	9 820406	9 945280	36	9 875125	10 054719
27	9 820835	9 946044	33	9 874791	10 053955
30	9 821264	9 946808	30	9 874456	10 053191
33	9 821692	9 947572	27	9 874120	10 052428
36	9 822119	9 948335	24	9 873784	10 051664
39	9 822546	9 948098	21	9 873447	10 050901
42	9 822972	9 949861	18	9 873110	10 050138
45	9 823397	9 950624	15	9 872772	10 049375
48	9 823821	9 951387	12	9 872433	10 048612
51	9 824244	9 952150	9	9 872094	10 047849
54	9 824667	9 952912	6	9 871754	10 047087
57	9 825089	9 953675	3	9 871414	10 046324

42 Grade.			47 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,825510	9,954437	60	9,871073	10,045562
3	9 825931	9 955199	57	9 870731	10 044800
6	9 826351	9 955961	54	9 870389	10 044038
9	9 826770	9 956723	51	9 870047	10 043276
12	9 827188	9 957485	48	9 869703	10 042515
15	9 827606	9 958246	45	9 869359	10 041753
18	9 828023	9 959008	42	9 869015	10 040992
21	9 828439	9 959769	39	9 868670	10 040230
24	9 828854	9 960530	36	9 868324	10 039469
27	9 829269	9 961291	33	9 867977	10 038708
30	9 829683	9 962052	30	9 867630	10 037947
33	9 830096	9 962813	27	9 867283	10 037186
36	9 830509	9 963574	24	9 866935	10 036426
39	9 830920	9 964334	21	9 866586	10 035665
42	9 831332	9 965095	18	9 866236	10 034904
45	9 831742	9 965855	15	9 865886	10 034144
48	9 832151	9 966615	12	9 865536	10 033384
51	9 832560	9 967375	9	9 865184	10 032624
54	9 832969	9 968136	6	9 864833	10 031864
57	9 833376	9 968896	3	9 864480	10 031104

43 Grade.			46 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,833783	9,969655	60	9,864127	10,030344
3	9 834189	9 970415	57	9 863773	10 029584
6	9 834594	9 971175	54	9 863419	10 028824
9	9 834999	9 971935	51	9 863064	10 028065
12	9 835403	9 972694	48	9 862708	10 027305
15	9 835806	9 973453	45	9 862352	10 026546
18	9 836209	9 974213	42	9 861995	10 025786
21	9 836610	9 974972	39	9 861638	10 025027
24	9 837012	9 975731	36	9 861280	10 024268
27	9 837412	9 976490	33	9 860921	10 023509
30	9 837812	9 977250	30	9 860562	10 022750
33	9 838211	9 978009	27	9 860202	10 021991
36	9 838609	9 978767	24	9 859841	10 021232
39	9 839007	9 979526	21	9 859480	10,020473
42	9 839404	9 980285	18	9 859118	10 019714
45	9 839800	9 981044	15	9 858756	10 018955
48	9 840195	9 981803	12	9 858392	10 018197
51	9 840590	9 982561	9	9 858029	10 017438
54	9 840985	9 983320	6	9 857664	10 016679
57	9 841378	9 984078	3	9 857299	10 015921

44 Grade.			45 Grade.		
Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.	Min.	Log. d. Sin.	Log. d. Tang.
0	9,841771	9,984837	60	9,856934	10,015162
3	9 842163	9 985595	57	9 856567	10 014404
6	9 842554	9 986354	54	9 856200	10 013646
9	9 842945	9 987112	51	9 855833	10 012887
12	9 843335	9 987870	48	9 855465	10 012129
15	9 843725	9 988628	45	9 855096	10 011371
18	9 844113	9 989387	42	9 854726	10 010612
21	9 844501	9 990145	39	9 854356	10 009854
24	9 844889	9 990903	36	9 853985	10 009096
27	9 845275	9 991661	33	9 853614	10 008338
30	9 845661	9 992419	30	9 853242	10 007580
33	9 846047	9 993177	27	9 852869	10 006822
36	9 846431	9 993935	24	9 852495	10 006064
39	9 846815	9 994694	21	9 852121	10 005306
42	9 847199	9 995452	18	9 851747	10 004548
45	9 847581	9 996210	15	9 851371	10 003790
48	9 847963	9 996968	12	9 850995	10 003032
51	9 848345	9 997726	9	9 850619	10 002274
54	9 848725	9 998484	6	9 850241	10 001516
57	9 849105	9 999242	3	9 849863	10 000758
60	9 849485	10 000000	0	9 849485	10 000000

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
0	Inf. neg.	17	1,230448	34	1,531478
1	0,000000	18	1 255272	35	1 544068
2	0 301030	19	1 278753	36	1 556302
3	0 477121	20	1 301030	37	1 568201
4	0 602060	21	1 322219	38	1 579783
5	0 698970	22	1 342422	39	1 591064
6	0 778151	23	1 361727	40	1 602060
7	0 845098	24	1 380211	41	1 612783
8	0 903090	25	1 397940	42	1 623249
9	0 954242	26	1 414973	43	1 633468
10	1 000000	27	1 431363	44	1 643452
11	1 041392	28	1 447158	45	1 653212
12	1 079181	29	1 462398	46	1 662757
13	1 113943	30	1 477121	47	1 672097
14	1 146128	31	1 491361	48	1 681241
15	1 176091	32	1 505150	49	1 690196
16	1 204120	33	1 518513	50	1 698970

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
51	1,707570	70	1,845098	89	1,949390
52	1 716003	71	1 851258	90	1 954242
53	1 724275	72	1 857332	91	1 959041
54	1 732393	73	1 863322	92	1 963787
55	1 740362	74	1 869231	93	1 968482
56	1 748188	75	1 875061	94	1 973127
57	1 755874	76	1 880813	95	1 977725
58	1 763428	77	1 886490	96	1 982271
59	1 770852	78	1 892094	97	1 986771
60	1 778151	79	1 897627	98	1 991226
61	1 785329	80	1 903090	99	1 995635
62	1 792391	81	1 908485	100	2 000000
63	1 799340	82	1 913813	101	4321
64	1 806180	83	1 919078	102	8600
65	1 812913	84	1 924279	103	2 012837
66	1 819543	85	1 929418	104	7033
67	1 826074	86	1 934498	105	2 021189
68	1 832508	87	1 939519	106	5305
69	1 838849	88	1 944482	107	9383

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
108	2,033423	127	3803	146	4352
109	7426	128	7210	147	7317
110	2 041392	129	2,110589	148	2,170261
111	5323	130	3943	149	3186
112	9218	131	7271	150	6091
113	2 053078	132	2 120573	151	8976
114	6904	133	3851	152	2 181843
115	2 060697	134	7104	153	4691
116	4458	135	2 130333	154	7520
117	8185	136	3538	155	2 190331
118	2 071882	137	6720	156	3124
119	5547	138	9879	157	5899
120	9181	139	2 143014	158	8657
121	2 082785	140	6128	159	2 201397
122	6395	141	9219	160	4120
123	9905	142	2 152288	161	6825
124	2 093421	143	5336	162	9515
125	6910	144	8362	163	2 212187
126	2 100370	145	2 161368	164	4845

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
165	7483	184	4817	203	7496
166	2,220108	185	7171	204	9630
167	2716	186	9512	205	2,311753
168	5309	187	2,271841	206	3867
169	7886	188	4157	207	5970
170	2 230448	189	6461	208	8063
171	2996	190	8753	209	2 320146
172	5528	191	2 281033	210	2219
173	8046	192	3301	211	4282
174	2 240549	193	5557	212	6335
175	3038	194	7801	213	8379
176	5512	195	2 290034	214	2 330413
177	7973	196	2256	215	2438
178	2 250420	197	4466	216	4453
179	2853	198	6665	217	6459
180	2 255272	199	8853	218	8456
181	7678	200	2 301030	219	2 340444
182	2 260071	201	3196	220	2422
183	2451	202	5351	221	4392

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
222	2,346353	241	2,382017	260	2,414973
223	8304	242	3815	261	6640
224	2 350248	243	5606	262	8301
225	2182	244	7389	263	9955
226	4108	245	9166	264	2 421603
227	6025	246	2 390935	265	3245
228	7934	247	2697	266	4881
229	9835	248	4451	267	6511
230	2 361727	249	6199	268	8134
231	3612	250	7940	269	9752
232	5488	251	9673	270	2 431363
233	7355	252	2 401400	271	2969
234	9215	253	3120	272	4568
235	2 371067	254	4833	273	6162
236	2912	255	6540	274	7750
237	4748	256	8240	275	9332
238	6577	257	9933	276	2 440909
239	8397	258	2 411619	277	2479
240	2,380211	259	3299	278	4044

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
279	2,445604	297	2,472756	315	2,498310
280	7158	298	4216	316	9687
281	8706	299	5671	317	2 501059
282	2 450249	300	2 477121	318	2427
283	1786	301	8566	319	3790
284	3318	302	2 480006	320	5150
285	4844	303	1442	321	6505
286	6366	304	2873	322	7855
287	7881	305	4299	323	9202
288	9392	306	5721	324	2 510545
289	2 460897	307	7138	325	1883
290	2398	308	8550	326	3217
291	3893	309	9958	327	4547
292	5382	310	2 491361	328	5873
293	6867	311	2760	329	7195
294	8347	312	4154	330	8513
295	9822	313	5544	331	9828
296	2 471291	314	6929	332	2 521138

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
333	2,522444	351	2,545307	369	2,567026
334	3746	352	6542	370	8201
335	5044	353	7774	371	9373
336	6399	354	9003	372	2 570542
337	7629	355	2 550228	373	1708
338	8916	356	1450	374	2871
339	0199	357	2668	375	4031
340	2 531478	358	3883	376	5187
341	2754	359	5094	377	6341
342	4026	360	6302	378	7491
343	5294	361	7507	379	8639
344	6558	362	8708	380	9783
345	7819	363	9906	381	2 580925
346	9076	364	2 561101	382	2063
347	2 540329	365	2292	383	3198
348	1579	366	3481	384	4331
349	2825	367	4666	385	5460
350	4068	368	5847	386	6587

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
387	2,587711	404	2,606381	421	2,624282
388	8831	405	7455	422	5312
389	9949	406	8526	423	6340
390	2 591064	407	9594	424	7365
391	2176	408	2 610660	425	8388
392	3286	409	1723	426	9409
393	4392	410	2783	427	2 630427
394	5496	411	3841	428	1443
395	6597	412	4897	429	2457
396	7695	413	5950	430	3468
397	8790	414	7000	431	4477
398	9883	415	8048	432	5483
399	2 600972	416	9093	433	6487
400	2,602060	417	2 620136	434	7489
401	3144	418	1176	435	8489
402	4226	419	2214	436	9486
403	5305	420	2 623249	437	2 640481

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
438	2,641474	457	2,659916	476	2,677607
439	2464	458	2 660865	477	8518
440	3452	459	1812	478	9427
441	4438	460	2757	479	2 680335
442	5422	461	3700	480	1241
443	6403	462	4642	481	2145
444	7383	463	5581	482	3047
445	8360	464	6518	483	3947
446	9334	465	7453	484	4845
447	2 650307	466	8385	485	5741
448	1278	467	9316	486	6636
449	2246	468	2 670245	487	7529
450	3212	469	1172	488	8419
451	4176	470	2097	489	9308
452	5138	471	3020	490	2 690196
453	6098	472	3942	491	1081
454	7055	473	4861	492	1965
455	8011	474	5778	493	2846
456	8964	475	6693	494	3726

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
495	2,694605	514	2,710963	533	2,726727
496	5481	515	1807	534	7541
497	6356	516	2649	535	8353
498	7229	517	3490	536	9164
499	8100	518	4329	537	9974
500	2 698970	519	5167	538	2 730782
501	9837	520	6003	539	1588
502	2 700703	521	6837	540	2393
503	1568	522	7670	541	3197
504	2430	523	8501	542	3999
505	3291	524	9331	543	4799
506	4150	525	2 720159	544	5598
507	5008	526	0985	545	6396
508	5863	527	1810	546	— 7192
509	6717	528	2633	547	7987
510	7570	529	3455	548	8780
511	8420	530	4275	549	9572
512	9270	531	5094	550	2 740362
513	2 710117	532	5911	551	1151

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
552	2,741939	571	2,756636	590	2,770852
553	2725	572	7396	591	1587
554	3509	573	8154	592	2321
555	4293	574	8911	593	3054
556	5074	575	9667	594	3786
557	5855	576	2 760422	595	4517
558	6634	577	1157	596	5246
559	7411	578	1927	597	5974
560	8188	579	2678	598	6701
561	8962	580	3428	599	7426
562	9736	581	4176	600	2 778151
563	2 750508	582	4923	601	8874
564	1279	583	5668	602	9596
565	2048	584	6412	603	2 780317
566	2816	585	7155	604	1036
567	3583	586	7897	605	1755
568	4348	587	8638	606	2472
569	5112	588	9377	607	3188
570	5874	589	2 770115	608	3903

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
609	2,784617	628	2,797959	647	2,810904
610	5329	629	8650	648	1575
611	6041	630	9340	649	2244
612	6751	631	2 800029	650	2913
613	7460	632	0717	651	3591
614	8168	633	1403	652	4247
615	8875	634	2089	653	4913
616	9580	635	2773	654	5577
617	2 790285	636	3457	655	6241
618	0988	637	4139	656	6903
619	1690	638	4820	657	7565
620	2391	639	5500	658	8225
621	3091	640	6180	659	8885
622	3790	641	6858	660	9543
623	4488	642	7535	661	2 820201
624	5184	643	8211	662	0858
625	5880	644	8885	663	1513
626	6574	645	9559	664	2168
627	7267	646	2 810232	665	2821

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
666	2,823474	685	2,835690	704	2,847572
667	4125	686	6324	705	8189
668	4776	687	6956	706	8804
669	5426	688	7588	707	9419
670	6074	689	8219	708	2 850033
671	6722	690	8849	709	0646
672	7369	691	9478	710	1258
673	8015	692	2 840106	711	1869
674	8659	693	0733	712	2480
675	9303	694	1359	713	3089
676	9946	695	1984	714	3698
677	2 830588	696	2609	715	4306
678	1229	697	3232	716	4913
679	1869	698	3855	717	5519
680	2508	699	4477	718	6124
681	3147	700	2 845098	719	6728
682	3784	701	5718	720	7332
683	4420	702	6337	721	7935
684	5056	703	6955	722	8537

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
723	2,859138	740	2,869231	757	2,879095
724	9738	741	9818	758	9669
725	2 860338	742	2 870403	759	2 880241
726	0936	743	0988	760	0813
727	1534	744	1572	761	1384
728	2131	745	2156	762	1955
729	2727	746	2738	763	2524
730	3322	747	3320	764	3093
731	3917	748	3901	765	3661
732	4511	749	4481	766	4228
733	5104	750	5061	767	4795
734	5696	751	5639	768	5361
735	6287	752	6217	769	5926
736	6877	753	6795	770	6490
737	7467	754	7371	771	7054
738	8056	755	7947	772	7617
739	8644	756	8521	773	8179

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
774	2,888741	791	2,898176	808	2,907411
775	9301	792	8725	809	7948
776	9861	793	9273	810	8485
777	2 890421	794	9820	811	9020
778	0979	795	2 900367	812	9556
779	1537	796	0913	813	2 910090
780	2094	797	1458	814	0624
781	2651	798	2002	815	1157
782	3206	799	2546	816	1690
783	3761	800	2 903090	817	2222
784	4316	801	3632	818	2753
785	4869	802	4174	819	3283
786	5422	803	4715	820	3813
787	5974	804	5256	821	4343
788	6526	805	5795	822	4871
789	7077	806	6335	823	5399
790	7627	807	6873	824	5927

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
825	2,916453	841	2,924796	857	2,932980
826	6980	842	5312	858	3487
827	7505	843	5827	859	3993
828	8030	844	6342	860	2 934498
829	8554	845	6856	861	5003
830	9078	846	7370	862	5507
831	9601	847	7883	863	6010
832	2 920123	848	8395	864	6513
833	0645	849	8907	865	7016
834	1166	850	9418	866	7517
835	1686	851	9929	867	8019
836	2206	852	2 930439	868	8519
837	2725	853	0949	869	9019
838	3244	854	1457	870	9519
839	3762	855	1966	871	2 940018
840	4279	856	2473	872	0516

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
873	2,941014	890	2,949390	907	2,957607
874	1511	891	9877	908	8085
875	2008	892	2 950364	909	8563
876	2504	893	0851	910	9041
877	2999	894	1337	911	9518
878	3494	895	1823	912	9994
879	3988	896	2308	913	2 960470
889	4482	897	2792	914	0946
881	4975	898	3276	915	1421
882	5468	899	3759	916	1895
883	5960	900	2 954242	917	2369
884	6452	901	4724	918	2842
885	6943	902	5206	919	3315
886	7433	903	5687	920	3787
887	7923	904	6168	921	4259
888	8413	905	6648	922	4730
889	8901	906	7128	923	5201

Nummer	Log.	Nummer	Log.	Nummer	Log.
924	2,965672	942	2 974050	960	2,982271
925	6141	943	4511	961	2723
926	6611	944	4972	962	3175
927	7079	945	5431	963	3626
928	7548	946	5891	964	4077
929	8015	947	6350	965	4527
930	8482	948	6808	966	4977
931	8949	949	7266	967	5426
932	9415	950	7723	968	5875
933	9881	951	8180	969	6323
934	2 970346	952	8636	970	6771
935	0811	953	9092	971	7219
936	1275	954	9548	972	7666
937	1739	955	2 980003	973	8112
938	2202	956	0457	974	8559
939	2665	957	0911	975	9004
940	2 973127	958	1365	976	9449
941	3589	959	1818	977	9894

Nummer	Log.	Nummer	Log.
978	2,990338	996	2,998259
979	0782	997	8695
980	1226	998	9130
981	1669	999	9565
982	2111		
983	2553		
984	2995		
985	2 993436		
986	3876		
987	4317		
988	4756		
989	5196		
990	5635		
991	6073		
992	6511		
993	6949		
994	7386		
995	7823		

Staatl. Bibliothek Passau

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Meyer, Andres Otto

Anleitung zur Trigonometrie in sokratisch-hevristischer Form für solche, die sich selbst darin unterrichten wollen, nebst Anwendung erklärter und bewiesener Sätze

Altona 1815

Passau, Staatliche Bibliothek -- S nv/OS 100
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11346090-0